

ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างแบบปรับปรุงสำหรับแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้น

An Improved Differential Evolution Algorithm for Solving Systems of Nonlinear Equations

วัชร วงศา

Watchara Wongs

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี ประเทศไทย

Department of Mathematics, Faculty of Science, Buriram Rajabhat University, Thailand

Received: 15 May 2026, Received in revised form: 27 July 2026, Accepted: 2 August 2026

Available online: 1 September 2026

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์และที่มา: ระบบสมการไม่เชิงเส้นเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดซึ่งพบได้ในหลายสาขา เช่น วิทยาศาสตร์ประยุกต์ วิศวกรรมศาสตร์ และการสร้างแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ ลักษณะเฉพาะของปัญหานี้คือมีความไม่เชิงเส้นสูงและมักมีจุดต่ำสุดเฉพาะที่จำนวนมาก การหาคำตอบด้วยวิธีแบบดั้งเดิมซึ่งใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันในการคำนวณมักประสบปัญหาการลู่เข้าสู่จุดต่ำสุดเฉพาะที่และไม่สามารถหาคำตอบได้หากกำหนดค่าเริ่มต้นไม่เหมาะสม ด้วยเหตุนี้ ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่าง (Differential Evolution: DE) ซึ่งเป็นวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดแบบวงกว้างจึงถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหานี้ อย่างไรก็ตาม ขั้นตอนวิธี DE พื้นฐานอาจประสบปัญหาการลู่เข้าช้าหรือลู่เข้าก่อนกำหนด รวมถึงเกิดการหยุดนิ่งในการค้นหาเมื่อเผชิญกับปัญหาที่มีความซับซ้อนสูง ซึ่งสาเหตุหลักมาจากการเลือกใช้ค่าพารามิเตอร์ควบคุมและกลยุทธ์การกลายพันธุ์ที่ไม่เหมาะสม ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อเสนอขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างที่ได้รับการปรับปรุงประสิทธิภาพ ซึ่งเรียกว่า DECM เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนจำนวน 6 ปัญหา โดยวิธีที่นำเสนอสามารถให้คำตอบที่มีความแม่นยำและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัย: งานวิจัยนี้ปรับปรุงขั้นตอนวิธี DE พื้นฐานใน 2 ส่วนหลัก ได้แก่ ส่วนที่หนึ่งเป็นการกำหนดค่าพารามิเตอร์ควบคุมด้วยค่าคงที่และแบบสุ่มในช่วงที่เหมาะสม เพื่อสร้างสมดุลระหว่างความหลากหลายของประชากรและความเร็วในการลู่เข้าโดยไม่สูญเสียประสิทธิภาพการค้นหา ส่วนที่สองคือการประยุกต์ใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงตามค่าความเหมาะสม โดยกลไกนี้ทำการเรียงลำดับเวกเตอร์ที่ถูกสุ่มเลือกและใช้เวกเตอร์ที่มีค่าความเหมาะสมที่สุดทำหน้าที่เป็นเวกเตอร์ฐาน เพื่อกำหนดทิศทางการค้นหาให้มุ่งสู่บริเวณที่มีแนวโน้มจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด ประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี DECM ถูกประเมินด้วยปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้นจำนวน 6 ปัญหา ได้แก่ Neurophysiology Robot kinematics Economics modeling Chemical equilibrium Combustion และ Automotive steering ภายใต้เกณฑ์การหยุด 2 รูปแบบที่สอดคล้องกับวรรณกรรม นั่นคือ ค่า Value-To-Reach (VTR) และจำนวนการประเมินฟังก์ชันสูงสุด (Max nf) เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธี DE พื้นฐาน DE-R และวิธีในกลุ่มของ PSO

ผลการวิจัย: ภายใต้เกณฑ์ VTR นั้น ขั้นตอนวิธี DECM มีอัตราความสำเร็จ 100% ในการแก้ปัญหาทั้ง 6 ปัญหา และให้ค่าเฉลี่ยของจำนวนการประเมินฟังก์ชันน้อยกว่าวิธี DE59-100 และ DE-R เกือบทุกปัญหา สำหรับปัญหาที่ 5 วิธี DECM ใช้จำนวนการประเมินฟังก์ชันเฉลี่ยเพียง 34009.80 ครั้ง ซึ่งน้อยกว่าวิธีเปรียบเทียบอย่างเห็นได้ชัด ในขณะที่ DE59-50 ไม่สามารถแก้ปัญหานี้ได้ นอกจากนี้ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ได้จากวิธี DECM ยังมีค่าต่ำกว่าวิธีเปรียบเทียบเกือบทุกกรณี ซึ่งผลการทดลองนี้แสดงให้เห็นว่าวิธีที่นำเสนอสามารถเข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วและมีความเสถียรในการค้นหาคำตอบ เมื่อพิจารณาเกณฑ์ Max nf ผลปรากฏว่า DECM สามารถให้ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ดีที่สุดต่ำกว่าวิธีเปรียบเทียบทุกกรณี และมีความโดดเด่นอย่างมากในปัญหาที่ 1 ยกเว้นปัญหาที่ 3 วิธี DECM ให้ค่าต่ำสุดเทียบเท่ากับวิธีเปรียบเทียบแต่ค่าเฉลี่ยที่ได้จากวิธีที่นำเสนอยังมากกว่าวิธีเปรียบเทียบในทุกกรณี ซึ่งผลการทดลองของเกณฑ์นี้แสดงให้เห็นว่าวิธี DECM สามารถให้คำตอบที่แม่นยำและมีความเสถียรในทุกปัญหาทดสอบยกเว้นปัญหาที่ 3 ซึ่งวิธีที่นำเสนอยังไม่สามารถป้องกันการลู่เข้าจุดต่ำสุดเฉพาะที่ได้ในบางครั้งของการทดลองสำหรับปัญหานี้

สรุปผลการวิจัย: ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างที่ปรับปรุงด้วยเทคนิคการใช้ค่าพารามิเตอร์ควบคุมที่เหมาะสมร่วมกับการใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงสำหรับแก้ปัญหาลำดับของระบบสมการไม่เชิงเส้น กลยุทธ์เหล่านี้ช่วยสร้างสมดุลระหว่างการค้นหาวงกว้างและการค้นหาเฉพาะที่ได้เป็นอย่างดีมีประสิทธิภาพ โดยมีจุดเด่นคือโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อนและง่ายต่อการประยุกต์ใช้งาน แต่สามารถให้ความแม่นยำสูงและมีความเร็วในการลู่เข้าคำตอบวงกว้างของปัญหาทดสอบได้ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากผลการประเมินประสิทธิภาพในงานวิจัยนี้ยังจำกัดอยู่เพียงกลุ่มปัญหาทดสอบจำนวน 6 ปัญหา ดังนั้น ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอจึงถือเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสำหรับการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนในบริบทที่ใกล้เคียงกัน ทั้งนี้ การศึกษาในอนาคตควรขยายการทดสอบไปยังปัญหาในโดเมนอื่นหรือปัญหาที่มีมิติสูงขึ้น เพื่อยืนยันความสามารถของขั้นตอนวิธีในระดับทั่วไปต่อไป

คำสำคัญ: ระบบสมการไม่เชิงเส้น; การหาค่าเหมาะที่สุดแบบวงกว้าง; ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่าง

Abstract

Background and Objectives: Systems of nonlinear equations are considered extremely important optimization problems in the computational field. They frequently appear and play a crucial role in many different practical fields, such as applied science, engineering, and economic modeling. Generally, these problems are characterized by their high nonlinearity and the presence of numerous local minima. Because of these challenging characteristics, traditional derivative-based methods often struggle to solve these problems. Specifically, they easily get stuck in local minima and depend heavily on initial values to function correctly. To overcome these limitations, researchers apply differential evolution (DE), which is widely recognized as a powerful global optimization method. However, the basic DE algorithm still faces certain critical challenges. It often suffers from slow convergence speed, premature convergence, or complete search stagnation in highly complex problems. These issues mainly result from the use of inappropriate control parameters and ineffective mutation strategies during the search process.

Therefore, this research proposes an improved differential evolution algorithm, named DECM. The main objective is to successfully solve six complex real-world systems of nonlinear equations with higher accuracy and a faster convergence speed compared to existing techniques.

Methodology: To achieve these goals, this research improves the standard differential evolution (DE) algorithm in two main parts. The first part focuses on setting appropriate control parameters that are randomly generated within appropriate ranges. These parameter settings help the system maintain a balance between population diversity and convergence speed. The second part applies a fitness-sorted mutation strategy. This process sorts randomly selected vectors based on their objective function values in ascending order. After sorting, it forces the vector with the best fitness to serve as the base vector. This approach effectively guides the search direction toward the most promising regions. To evaluate its actual performance, the DECM algorithm is tested on five real-world nonlinear systems of equations. These problems include Neurophysiology, Robot kinematics, Economics modeling, Chemical equilibrium, Combustion, and Automotive steering. The experiments use two stopping criteria based on existing literature: Value-To-Reach (VTR) and the maximum number of function evaluations (Max nf). Finally, the results of DECM are directly compared with DE59-50, DE59-100, DE-R, and PSO-based methods.

Main Results: Under the VTR criterion, the proposed DECM algorithm achieves a perfect 100% success rate across all five problems. Furthermore, it requires a lower mean of function evaluations (Mean nf) than the compared methods in most cases. For example, in Problem 5, DECM uses an average of only 34009.80 evaluations to find a solution. This number is significantly lower than the other methods, whereas DE59-50 completely fails to solve this problem. Additionally, DECM produces lower standard deviations than the comparative methods in almost all scenarios. The experimental results indicate that the proposed algorithm achieves rapid convergence and maintains stability in finding the solution. Under the Max nf criterion, DECM consistently yields lower average best objective function values than all compared methods, demonstrating significant improvements in Problem 1. However, Problem 3 presents an exception. In this problem, DECM successfully finds the same minimum value as the compared methods, but its average value remains higher. The experimental results under this criterion demonstrate that the DECM method provides accurate and stable solutions across all test problems, except for Problem 3, where the proposed method occasionally fails to avoid converging to local minima during some experimental runs.

Conclusions: In summary, this research successfully presents an improved differential evolution algorithm called DECM for solving real-world systems of nonlinear equations. The proposed algorithm combines appropriate control parameters with a fitness-sorted mutation strategy. These implemented strategies effectively balance global exploration and local exploitation. The proposed algorithm has a relatively simple structure, facilitating

straightforward implementation. At the same time, it provides high accuracy and fast convergence directly to the global optimum. However, as the performance evaluation is limited to a set of six test problems, the proposed algorithm is considered a promising tool for solving complex systems of nonlinear equations within similar contexts. Future research should expand the testing to include problems in other domains or higher-dimensional systems to further validate the generalization capability of the algorithm.

Keywords: systems of nonlinear equations; global optimization; differential evolution algorithm

*Corresponding author. E-mail: watchara.ws@bru.ac.th

Introduction

ระบบสมการไม่เชิงเส้นเป็นปัญหาที่พบบ่อยในงานด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ โดยทั่วไประบบสมการนี้ประกอบด้วยสมการจำนวน m สมการ และตัวแปรจำนวน n ตัว ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

เมื่อ f_i เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหรือบางฟังก์ชันอาจเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรที่ต้องการหา โดยที่ x ทำให้ทุก f_i มีค่าเท่ากับศูนย์ในการแก้ปัญหาดังกล่าว วิธีเชิงตัวเลขแบบดั้งเดิมที่ใช้การคำนวณอนุพันธ์มักประสบปัญหาเมื่อเมทริกซ์จาโคเบียนเป็นเมทริกซ์เอกฐาน ดังนั้น นักวิจัยจึงแปลงปัญหารบบสมการไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด โดยนิยามฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นผลรวมกำลังสองของฟังก์ชัน (Sum of the squares) ดังนี้

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (2)$$

ซึ่งการทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าน้อยที่สุดนั้นสมมูลกับการแก้ระบบสมการเดิม อย่างไรก็ตาม ภายหลังการแปลงปัญห ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้มักมีลักษณะเฉพาะที่มีความไม่เชิงเส้นสูงและปรากฏจุดต่ำสุดเฉพาะที่จำนวนมาก การใช้วิธีดั้งเดิมที่ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นจึงมักลู่เข้าสู่จุดต่ำสุดเฉพาะที่เหล่านี้และไม่สามารถหาคำตอบวงกว้างได้หากกำหนดค่าเริ่มต้นไม่เหมาะสม ด้วยเหตุนี้ ในช่วงที่ผ่านมานักวิจัยจึงได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดแบบวงกว้างสำหรับการแก้ปัญหานี้ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มหลัก ดังนี้

กลุ่มแรกเป็นการใช้วิธีแบบผสมผสาน Karr *et al.* (1998) เสนอวิธีที่รวมขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม (Genetic algorithm: GA) เข้ากับวิธีของนิวตัน โดยใช้ GA สร้างค่าเริ่มต้น และใช้วิธีของนิวตันในการปรับความแม่นยำของคำตอบ Luo *et al.* (2008) ผสาน chaos optimization เข้ากับ quasi-Newton method เพื่อใช้ประโยชน์จากการค้นหาวงกว้างและการลู่เข้าที่

รวดเร็วของวิธีเชิงอนุพันธ์ Ouyang *et al.* (2009) เสนอ HPSO ซึ่งผสมผสานวิธีหาค่าเหมาะที่สุดแบบกลุ่มอนุภาค (Particle swarm optimization: PSO) เข้ากับ Nelder-Mead simplex method เพื่อหลีกเลี่ยงการติดอยู่ที่จุดต่ำสุดเฉพาะที่ ขณะที่ Raja *et al.* (2018) พัฒนา PSO-NMM เพื่อใช้ PSO ในการค้นหาแบบวงกว้างและใช้ Nelder-Mead method ในการปรับปรุงค่าตอบให้มีความแม่นยำมากขึ้น วิธีเหล่านี้มักให้ผลลัพธ์แม่นยำ แต่โครงสร้างแบบผสมผสานอาจเพิ่มความซับซ้อนในการคำนวณและความยากในการปรับพารามิเตอร์

กลุ่มที่สองคือกลยุทธ์เพิ่มความหลากหลายของประชากร Pourjafari & Mojallali (2012) ผสมผสาน invasive weed optimization กับการจัดกลุ่มเพื่อสร้างบริเวณการค้นหารอบ ๆ คำตอบเริ่มต้นที่ค้นพบ Ren *et al.* (2013) ปรับปรุง GA เพื่อเพิ่มความหลากหลายของประชากรและเพิ่มประสิทธิภาพการค้นหา ส่วน Zhang *et al.* (2019) ได้ปรับปรุงขั้นตอนวิธี cuckoo search ด้วยกลยุทธ์ niche เพื่อเพิ่มความหลากหลายของการค้นหาและหลีกเลี่ยงการติดอยู่ที่จุดต่ำสุดเฉพาะที่ นอกจากนี้ Mangla *et al.* (2021) ใช้ Gaussian mutation เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของ GA ในการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น

กลุ่มที่สามใช้วิธีการพัฒนามาบนพื้นฐานของวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่าง (DE) สำหรับแก้ปัญหาแบบสมการไม่เชิงเส้น โดย Wetweerapong & Puphasuk (2020) เสนอขั้นตอนวิธี DE-R ซึ่งใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์ 2 รูปแบบร่วมกับเทคนิคการเริ่มใหม่ เพื่อสร้างสมดุลระหว่างการค้นหาวงกว้างและการค้นหาเฉพาะที่และลดปัญหาการหยุดนิ่งของการค้นหา (Search stagnation) ผลการทดลองรายงานว่า DE-R สามารถแก้ปัญหาที่นำมาทดสอบทั้งหมดได้และให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าวิธีเปรียบเทียบหลายวิธี

แม้ว่าวิธีในวรรณกรรมก่อนหน้าจะมีประสิทธิภาพที่ดี แต่ยังพบข้อจำกัดบางประการ เช่น ทรัพยากรการคำนวณที่สูงจากการใช้วิธีแบบผสมผสาน หรือวิธี DE-R ที่แม้จะแก้ปัญหาการหยุดนิ่งได้แต่ยังมีโครงสร้างที่ค่อนข้างซับซ้อนจากการต้องใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์ถึง 2 รูปแบบร่วมกับเทคนิคการเริ่มใหม่ หรือวิธี DE พื้นฐาน ที่ใช้พารามิเตอร์ควบคุมแบบคงที่และใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์ $DE/rand/1$ ยังไม่สามารถแก้ปัญหาทดสอบบางปัญหาได้ อีกทั้งยังมีความเสี่ยงในการลู่เข้าสู่คำตอบวงกว้างที่ต่ำ ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมุ่งพัฒนาขั้นตอนวิธีที่ยังคงรักษาโครงสร้างที่เรียบง่ายของขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างพื้นฐานไว้ แต่เพิ่มประสิทธิภาพอย่างมีนัยสำคัญผ่านขั้นตอนวิธีที่เรียกว่า DECM วิธีที่นำเสนอมีความแตกต่างจากงานวิจัยเดิมคือ ไม่ใช้กลไกการเริ่มใหม่หรือสลับการทำงานที่ซับซ้อน แต่เปลี่ยนมามุ่งเน้นการปรับปรุง 2 ส่วนหลักพร้อมกัน ได้แก่ การสุ่มค่าพารามิเตอร์ควบคุมในช่วงที่เหมาะสม และกลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงซึ่งเป็นกลไกที่กำหนดทิศทางการค้นหาให้มุ่งไปสู่บริเวณที่คาดว่าจะป็นคำตอบที่ดีกว่าจึงส่งผลให้ความเร็วในการลู่เข้าเพิ่มขึ้น ในขณะเดียวกัน เพื่อป้องกันไม่ให้ประชากรสูญเสียความหลากหลายเร็วเกินไปจากการกลไกดังกล่าว DECM จึงประยุกต์ใช้การกำหนดพารามิเตอร์ F และ CR แบบสุ่มในช่วงและกำหนดขนาดของประชากร NP ให้มากเพียงพอ ทำให้สามารถสร้างความสมดุลระหว่างการค้นหาวงกว้างและการค้นหาเฉพาะที่ได้ โดยผลงานสำคัญของงานวิจัยมีดังนี้

1) เสนอขั้นตอนวิธี DECM ซึ่งกำหนดขนาดประชากรเป็น 70 พร้อมทั้งใช้ค่าแฟกเตอร์ปรับขนาด F และค่าอัตรา การข้ามสายพันธุ์ CR จากการสุ่มจำนวนจริงบนช่วง $[0.5, 0.7]$ และ $[0.9, 1.0]$ ตามลำดับ เพื่อเพิ่มความหลากหลายของประชากร

2) เสนอขั้นตอนวิธี DECM ซึ่งประยุกต์ใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียง โดยให้เวกเตอร์ที่มีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่สุดในกลุ่มของการสุ่มเลือกในขั้นตอนการกลายพันธุ์ทำหน้าที่เป็นเวกเตอร์ฐาน เพื่อเร่งความเร็วในการลู่เข้า และทำให้การค้นหามีทิศทางที่ดีขึ้น

3) ประเมินประสิทธิภาพของ DECM บนปัญหาจริงของระบบสมการไม่เชิงเส้นจำนวน 6 ปัญหา ภายใต้เกณฑ์การหยุด 2 รูปแบบ และเปรียบเทียบกับขั้นตอนวิธี DE พื้นฐาน ได้แก่ DE59-50 และ DE59-100 และวิธี DE ที่ได้รับการปรับปรุง นั่นคือ DE-R พร้อมทั้งเปรียบกับวิธีในกลุ่ม PSO ที่รายงานในวรรณกรรม

ส่วนที่เหลือของบทความจัดลำดับดังนี้ ส่วนที่ 2 กล่าวถึงหลักการของ DE พื้นฐานและนำเสนอขั้นตอนวิธี DECM พร้อมทั้งการออกแบบการทดลอง ส่วนที่ 3 นำเสนอผลการทดลอง ส่วนที่ 4 อภิปรายผล และส่วนที่ 5 สรุปผลการวิจัย

Methodology

1) ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างพื้นฐาน

ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่าง (DE) เป็นวิธีการหาค่าเหมาะที่สุดแบบวงกว้างที่แนะนำเสนอในปี ค.ศ. 1995 (Storn & Price, 1995) สำหรับแก้ปัญหาตัวแปรต่อเนื่อง วิธี DE มีพารามิเตอร์ควบคุม 3 ตัว ได้แก่ ขนาดประชากร NP แฟกเตอร์ปรับขนาด F และอัตราการข้ามสายพันธุ์ CR โดยขั้นตอนการทำงานของ DE พื้นฐานประกอบด้วย 4 ขั้นตอนหลักดังนี้

(1) การกำหนดค่าเริ่มต้น

กำหนดประชากรเริ่มต้นด้วยจำนวน NP เวกเตอร์ ซึ่งแต่ละเวกเตอร์เป้าหมาย (Target vector) x_i สามารถสร้างได้ดังนี้

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,D}), \quad i=1, 2, \dots, NP \quad (3)$$

เมื่อ D คือมิติของปัญหา โดยที่แต่ละองค์ประกอบเป็นจำนวนจริงที่ถูกสุ่มในขอบเขตล่าง (LB) และขอบเขตบน (UB)

(2) การกลายพันธุ์

สำหรับแต่ละเวกเตอร์เป้าหมาย x_i ขั้นตอนนี้สร้างเวกเตอร์กลายพันธุ์ (Mutant vector) v_i ด้วยกลยุทธ์พื้นฐาน $DE/rand/1$ ซึ่งตัวย่อ 'rand' หมายถึงการสุ่มเลือกเวกเตอร์ฐาน (Base vector) และ '1' หมายถึงการใช้ผลต่างของเวกเตอร์จำนวน 1 คู่ในการกำหนดทิศทางการค้นหา ดังนี้

$$v_i = x_{r_1} + F(x_{r_2} - x_{r_3}) \quad (4)$$

เมื่อ r_1 , r_2 และ r_3 เป็นดัชนีที่สุ่มเลือกจาก 1 ถึง NP โดยที่ $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ และ F เป็นค่าแฟกเตอร์ปรับขนาดโดยที่ F เป็นจำนวนจริงบนช่วง $[0, 2]$

(3) การข้ามสายพันธุ์

ขั้นตอนนี้สร้างเวกเตอร์ทดลอง (Trial vector) u_i ด้วยการแลกเปลี่ยนองค์ประกอบจาก v_i และ x_i ตามค่าอัตราการข้ามสายพันธุ์ CR ดังนี้

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j}, & \text{if } rand_j < CR \text{ or } j = j_{rand} \\ x_{i,j}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

เมื่อ $rand_j$ เป็นการสุ่มแบบเอกรูปในช่วง $[0, 1]$ และ j_{rand} เป็นดัชนีที่ถูกสุ่มในช่วง $[1, D]$

(4) การคัดเลือก

หากเวกเตอร์ทดลอง u_i ให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดีกว่าเวกเตอร์เป้าหมาย x_i ขั้นตอนนี้เลือก u_i แทนที่ x_i เพื่อเป็นประชากรของรุ่นถัดไป มิฉะนั้นจะคง x_i ไว้

ประสิทธิภาพของ DE พื้นฐานขึ้นอยู่กับทางเลือกค่าพารามิเตอร์ควบคุมและกลยุทธ์การกลายพันธุ์ หากกำหนดไม่เหมาะสม ขั้นตอนวิธีนี้อาจลู่เข้าก่อนกำหนดหรือเกิดการหยุดนิ่งของการค้นหาหรือทำให้ลู่เข้าช้า โดยเฉพาะเมื่อประยุกต์ใช้แก้ปัญหาแบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อน

2) ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอ

งานวิจัยนี้เสนอขั้นตอนวิธี DECM ซึ่งปรับปรุง DE พื้นฐานใน 2 ส่วนหลัก ได้แก่ การกำหนดค่าพารามิเตอร์และกลยุทธ์การกลายพันธุ์

(1) การกำหนดค่าพารามิเตอร์

การศึกษานี้กำหนดขนาดประชากร NP เป็น 70 ซึ่งได้จากการทดลองเบื้องต้นเพื่อวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ พบว่าเป็นขนาดประชากรที่เหมาะสมโดยสามารถให้อัตราความสำเร็จ 100% ในปัญหาที่มีความซับซ้อนสูงได้โดยไม่สิ้นเปลืองทรัพยากรการคำนวณมากเกินไป นอกจากนี้ยังสุ่มจำนวนจริงบนช่วง $[0.5, 0.7]$ และ $[0.9, 1.0]$ สำหรับกำหนดค่าแฟกเตอร์ปรับขนาด F และค่าอัตราการข้ามสายพันธุ์ CR ตามลำดับ โดยการกำหนด F ให้อยู่ในช่วงระดับกลางช่วยรักษาความหลากหลายของประชากรไม่ให้อัตราการลู่เข้าเร็วเกินไป ในขณะที่การกำหนด CR ให้มีค่าสูงจะส่งเสริมให้นำข้อมูลจากเวกเตอร์กลายพันธุ์มาใช้เป็นจำนวนมากทำให้เกิดการค้นหาเฉพาะที่ได้ดีขึ้น

(2) กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียง

DECM ปรับปรุง $DE/rand/1$ ด้วยกลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียง ดังนี้

$$v_i = x_{r_1}^* + F(x_{r_2}^* - x_{r_3}^*) \quad (6)$$

เมื่อ $f(x_{r_1}^*) \leq f(x_{r_2}^*) \leq f(x_{r_3}^*)$ กลไกนี้บังคับให้เวกเตอร์ฐานเป็นสมาชิกที่ดีที่สุดจาก 3 เวกเตอร์ที่ถูกสุ่มเลือกในขั้นตอนการกลายพันธุ์ ทำให้ทิศทางการค้นหาถูกชี้นำให้มุ่งไปยังบริเวณที่มีแนวโน้มจะเป็นคำตอบที่ดีกว่า ซึ่งช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการค้นหาและเร่งความเร็วในการลู่เข้า อย่างไรก็ตาม เนื่องจากกลุ่มเวกเตอร์ทั้ง 3 มาจากการสุ่มเลือกจากประชากรทั้งหมด กลยุทธ์นี้จึงยังคงรักษาความหลากหลายของประชากรทำให้ขั้นตอนวิวิสามารถค้นหาวางกว้างและลดโอกาสการลู่เข้าก่อนกำหนดได้ โดยรายละเอียดของขั้นตอนวิธี DECM ถูกอธิบายไว้ใน Table 1

3) การออกแบบการทดลอง

เพื่อประเมินประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี DECM อย่างเป็นระบบ งานวิจัยนี้ดำเนินการทดลอง 2 รูปแบบ โดยใช้เกณฑ์การหยุดที่แตกต่างกัน เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบผลกับวิธีที่รายงานในวรรณกรรมอย่างเป็นธรรม ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอ ถูกพัฒนาด้วยโปรแกรม Scilab version 2024.1.0 และทำการทดลองบนเครื่องคอมพิวเตอร์ 12th Gen Intel® core™ i5-1235U processor 1.3 GHz and 8 GB RAM โดยทดสอบกับปัญหาจริงของระบบสมการไม่เชิงเส้นจำนวน 6 ปัญหา ได้แก่ Neurophysiology Robot kinematics Economics modeling Chemical equilibrium Combustion และ Automotive steering ซึ่งรายละเอียดของแต่ละปัญหามานำมาจากการวิจัยของ Wetweerapong & Puphasuk (2020)

(1) ปัญหาทดสอบ

ปัญหาที่ 1 ระบบ Neurophysiology เป็นระบบสมการ 6 สมการ 6 ตัวแปร โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ f_2(x) = x_2^2 + x_4^2 - 1 = 0 \\ f_3(x) = x_5 x_3^3 + x_6 x_4^3 - c_1 = 0 \\ f_4(x) = x_5 x_1^3 + x_6 x_2^3 - c_2 = 0 \\ f_5(x) = x_5 x_1 x_3^2 + x_6 x_4^2 x_2 - c_3 = 0 \\ f_6(x) = x_5 x_1^2 x_3 + x_6 x_2^2 x_4 - c_4 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

เมื่อ $c_i = 0$ สำหรับทุก i และ $-10 \leq x_i \leq 10$

ปัญหาที่ 2 ระบบ Robot kinematics เป็นปัญหาการหาค่าการเคลื่อนที่ของข้อต่อหุ่นยนต์เพื่อให้ปลายแขนกลอยู่ในตำแหน่งและทิศทางที่กำหนด ส่งผลให้ได้ระบบสมการ 8 สมการ 8 ตัวแปร ดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} f_1(x) = 4.731 \times 10^{-3} x_1 x_3 - 0.3578 x_2 x_3 \\ \quad - 0.1238 x_1 + x_7 - 1.637 \times 10^{-3} x_2 \\ \quad - 0.9338 x_4 - 0.3571 = 0 \\ f_2(x) = 0.2238 x_1 x_3 + 0.7623 x_2 x_3 + 0.2638 x_1 \\ \quad - 0.07745 x_2 - 0.6734 x_4 - 0.6022 = 0 \\ f_3(x) = x_6 x_8 + 0.3578 x_1 + 4.731 \times 10^{-3} x_2 = 0 \\ f_4(x) = -0.7623 x_1 + 0.2238 x_2 + 0.3461 = 0 \\ f_5(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_6(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \\ f_7(x) = x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0 \\ f_8(x) = x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

เมื่อ $-1 \leq x_i \leq 1$

Table 1 Pseudocode of the DECM algorithm

Input:

Objective function f ; Problem dimension D ; Search space bounds [LB, UB]

Population size $NP = 70$; Value to Reach $VTR = 10^{-20}$

Maximum number of function evaluations Max nf

Scaling factor range $F \in [0.5, 0.7]$ and Crossover rate range $CR \in [0.9, 1.0]$

(1) Initialization

Generate an initial population of NP individuals x_i using Eq. (3).

Evaluate the objective function $f(x_i)$ for each individual.

Identify and record the best vector xb and its corresponding fitness value fb .

Set current number of function evaluations nf = NP .

(2) Main Loop

While $fb > VTR$ and nf < Max nf do

For each target vector x_i ($i = 1, 2, \dots, NP$) do

(3) Mutation

Random real value F from the range [0.5, 0.7].

Generate a mutant vector v_i using Eq. (6).

(4) Crossover

Random real value CR from the range [0.9, 1.0].

Generate a trial vector u_i using Eq. (5).

(5) Selection

Evaluate $f(u_i)$ and increment nf = nf + 1.

If $f(u_i) < f(x_i)$ then

Replace target vector x_i with trial vector u_i .

End if

If $f(u_i) < fb$ then

Update the best vector $xb = x_i$.

Update the best fitness value $fb = f(u_i)$.

End if

End for

End while

(6) Termination

Report the best solution xb and the best objective value fb .

ปัญหาที่ 3 ระบบ Economics modeling เป็นปัญหาจากแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปทั่วไปที่ n มิติ ได้ดังนี้

$$\begin{cases} f_i(x) = (x_i + \sum_{j=1}^{n-i-1} x_j x_{j+i})x_n - c_i = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ f_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j + 1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

เมื่อ $c_i = 0$ สำหรับทุก i และ $-10 \leq x_i \leq 10$

ปัญหาที่ 4 ระบบ Chemical equilibrium เป็นระบบสมมูลเคมีที่เกี่ยวข้องกับการเผาไหม้ของโพรเพนในอากาศ ซึ่งสามารถลดรูปให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการ 5 สมการ 5 ตัวแปร ได้ดังนี้

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 x_2 + x_1 - 3x_5 = 0 \\ f_2(x) = 2x_1 x_2 + x_1 + x_2 x_3^2 + R_5 x_2 - R_1 x_5 \\ \quad + 2R_7 x_2^2 + R_4 x_2 x_3 + R_6 x_2 x_4 = 0 \\ f_3(x) = 2x_2 x_3^2 + 2R_2 x_3^2 - 8x_5 + R_3 x_3 \\ \quad + R_4 x_2 x_3 = 0 \\ f_4(x) = R_6 x_2 x_4 + 2x_4^2 - 4R_1 x_5 = 0 \\ f_5(x) = x_1(x_2 + 1) + R_7 x_2^2 + x_2 x_3^2 + R_5 x_2 \\ \quad + R_2 x_3^2 + x_4^2 - 1 + R_3 x_3 + R_4 x_2 x_3 \\ \quad + R_6 x_2 x_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

เมื่อ $-100 \leq x_i \leq 100$ และค่าคงที่สำหรับระบบสมการมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 & R_2 &= 0.193 & R_3 &= 0.002597/\sqrt{40} \\ R_4 &= 0.003448/\sqrt{40} & R_5 &= 0.00001799/40 \\ R_6 &= 0.0002155/\sqrt{40} & R_7 &= 0.00003846/40 \end{aligned}$$

ปัญหาที่ 5 ระบบ Combustion เป็นปัญหาสมมูลเคมีเกี่ยวกับการเผาไหม้ ซึ่งประกอบด้วยระบบสมการ 10 สมการ 10 ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 + 2x_6 + x_9 + 2x_{10} - 10^{-5} = 0 \\ f_2(x) = x_3 + x_8 - 3 \times 10^{-5} = 0 \\ f_3(x) = x_1 + x_3 + 2x_5 + 2x_8 + x_9 + x_{10} \\ \quad - 5 \times 10^{-5} = 0 \\ f_4(x) = x_4 + 2x_7 - 10^{-5} = 0 \\ f_5(x) = 0.5140437 \times 10^{-7} x_5 - x_1^2 = 0 \\ f_6(x) = 0.1006932 \times 10^{-6} x_6 - 2x_2^2 = 0 \\ f_7(x) = 0.7816278 \times 10^{-15} x_7 - x_4^2 = 0 \\ f_8(x) = 0.1496236 \times 10^{-6} x_8 - x_1 x_2 = 0 \\ f_9(x) = 0.6194411 \times 10^{-7} x_9 - x_1 x_2 = 0 \\ f_{10}(x) = 0.2089296 \times 10^{-14} x_{10} - x_1 x_2^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

เมื่อ $-20 \leq x_i \leq 20$

ปัญหาที่ 6 ระบบ Automotive steering ปัญหานี้อธิบายถึงระบบบังคับเลี้ยวของรถยนต์ที่มีกลไกแบบ 6 ชิ้นส่วน โดยระบบทางคณิตศาสตร์นี้ประกอบด้วย 3 สมการ และ 3 ตัวแปร ดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} f_i(x) = [E_i(x_2 \sin \phi_i - x_3) - F_i(x_2 \sin \psi_i - x_3)]^2 + [F_i(1 + x_2 \cos \psi_i) - E_i(x_2 \cos \phi_i - 1)]^2 \\ - [(1 + x_2 \cos \psi_i)(x_2 \sin \phi_i - x_3)x_1 - (x_2 \sin \psi_i - x_3)(x_2 \cos \phi_i - x_3)x_1]^2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

เมื่อ $i = 1, 2$ และ 3 โดยที่ $0 \leq x_i \leq 1$ และ

$$\begin{aligned} E_i &= x_2(\cos \psi_i - \cos \phi_i) - x_2 x_3(\sin \psi_i - \sin \psi_0) - (x_2 \sin \psi_i - x_3)x_1 \\ F_i &= -x_2 \cos \phi_i - x_2 x_3 \sin \phi_i + x_2 \cos \phi_0 + x_1 x_3 + (x_3 - x_1)x_2 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (13)$$

โดยระบบมีค่าคงตัว ϕ_i และ ψ_i ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1.3954170041747090114 \\ \phi_1 &= 1.7444828545735749268 \\ \phi_2 &= 2.0656234369405315689 \\ \phi_3 &= 2.4600678478912500533 \\ \psi_0 &= 1.7461756494150842271 \\ \psi_1 &= 2.0364691127919609051 \\ \psi_2 &= 2.2390977868265978920 \\ \psi_3 &= 2.4600678409809344550 \end{aligned} \quad (14)$$

(2) การทดลองเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพภายใต้เกณฑ์ Value-To-Rach (VTR)

การทดลองนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประเมินประสิทธิภาพการลู่เข้าของ DECM เพื่อเปรียบเทียบกับวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างพื้นฐาน DE59-50 DE59-100 และวิธี DE ที่ได้รับการปรับปรุง นั่นคือ DE-R โดยใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตามสมการที่ 2 ซึ่งกำหนดค่า VTR ที่ 10^{-20} และค่า Max nf ที่ 1000000 สำหรับแต่ละขั้นตอนวิธีดำเนินการจำนวน 30 รอบอิสระ โดยวิธี DECM ใช้ค่าพารามิเตอร์ตามที่อธิบายในส่วนที่ 2) การทดลองนี้ใช้ตัวชี้วัดในการเปรียบเทียบคือจำนวนรอบที่ประสบความสำเร็จ (Number of Successful runs: NS) เมื่อแต่ละวิธีเข้าถึงค่า VTR ก่อนที่จำนวนการประเมินฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ Max nf ค่าเฉลี่ยของจำนวนการประเมินฟังก์ชัน (Mean of function evaluation: Mean nf) และร้อยละของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (%SD)

(3) การทดลองเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพภายใต้เกณฑ์จำนวนการประเมินฟังก์ชันสูงสุด (Max nf)

การทดลองนี้ประเมินความแม่นยำและความเสถียรของ DECM ด้วยเกณฑ์การหยุด Max nf ที่ทดลองซ้ำแต่ละกรณีจำนวน 100 รอบอิสระ เพื่อให้สอดคล้องกับวรรณกรรมของวิธี DE-R และวิธีในกลุ่ม PSO และทำการปรับค่าคงตัวในปัญหาที่ 3 โดยกำหนด $c_i = 1$ สำหรับทุก i และ $n = 5$ ซึ่งต่างจากการทดลองด้วยเกณฑ์ VTR ที่ใช้ค่าคงตัว $c_i = 0$ สำหรับทุก i และ $n = 10$ ทำให้ปัญหานี้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่ากำลังสองเฉลี่ย (Mean square) ที่นิยามได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (15)$$

โดยที่ m คือจำนวนสมการในระบบ และใช้ตัวชี้วัดในการเปรียบเทียบกับค่าสถิติของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ดีที่สุด (fb) ที่ได้จากแต่ละขั้นตอนวิธี นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้ทำการทดลองวิธี DE59-50 DE59-100 และ DE-R เพิ่มเติมเพื่อนำมาเปรียบเทียบในปัญหาที่ 2 และ 6

Results

ในส่วนนี้นำเสนอผลการทดสอบเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ควบคุมและผลการประเมินประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี DECM บนปัญหาจริงของระบบสมการไม่เชิงเส้นทั้ง 6 ปัญหา ตามเกณฑ์การหยุดที่ใช้ได้แก่ ค่า VTR และ Max nf ดังต่อไปนี้

(1) ผลการทดสอบเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ควบคุม

ผู้วิจัยได้ทำการทดลองเบื้องต้นเพื่อวิเคราะห์ความไว (Sensitivity analysis) ของขนาดประชากร (NP) และใช้ค่า F และ CR บนช่วงที่นำเสนอ ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อสมดุลระหว่างความหลากหลายของการค้นหาและทรัพยากรการคำนวณ การทดลองนี้ใช้เกณฑ์ VTR และดำเนินการบนปัญหาตัวแทนที่มีระดับความซับซ้อนแตกต่างกัน ได้แก่ Chemical equilibrium Economics modeling และปัญหาที่มีความซับซ้อนสูงอย่าง Combustion โดยเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการใช้ NP ขนาด 30 50 70 และ 100 ดังแสดงใน Table 2

Table 2 Sensitivity analysis of the control parameters for the DECM algorithm on the selected test problems

Problem	NP	NS	Mean nf	%SD
Chemical equilibrium	30	29.	16695.59	6.72
	50	30	22830.50	4.67
	70	30	30499.00	4.55
	100	30	43237.46	5.52
Economics modeling	30	30	3911.03	5.45
	50	30	7981.47	6.88
	70	30	12754.03	5.58
	100	30	20143.67	5.23
Combustion	30	0	-	-
	50	27	224623.63	140.03
	70	30	34056.53	3.60
	100	30	55144.5	4.13

จากผลลัพธ์ใน Table 2 พบว่าการเปลี่ยนแปลงขนาดของประชากรมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อความสามารถในการค้นหาคำตอบ โดยเฉพาะในปัญหา Combustion ซึ่งเมื่อกำหนด NP เท่ากับ 30 ขั้นตอนวิธีจะล้มเหลวในการหาคำตอบโดยสิ้นเชิง และเมื่อเพิ่ม NP เป็น 50 แม้จะสามารถหาคำตอบได้เพิ่มขึ้น แต่ยังให้ความแม่นยำที่ต่ำ ในทางกลับกัน เมื่อกำหนด NP เท่ากับ 70 และ 100 ขั้นตอนวิธีสามารถประสบความสำเร็จ 100% อย่างไรก็ตาม การใช้ NP ที่ 100 จำเป็นต้องใช้จำนวนการประเมินฟังก์ชันเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นทำให้การลู่เข้าช้าลง ดังนั้น จากผลการวิเคราะห์ความไวนี้ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจเลือกใช้ค่า NP เท่ากับ 70 ซึ่งเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดที่ให้ทั้งความเร็วในการลู่เข้าคำตอบและความสำเร็จในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนแตกต่างกัน

(2) ผลการทดสอบประสิทธิภาพการลู่เข้าภายใต้เกณฑ์ VTR

Table 3 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ DE พื้นฐาน DE59-50 DE59-100 และ DE-R ที่เพิ่มกลยุทธ์การเริ่มใหม่ กับวิธีที่นำเสนอภายใต้เกณฑ์ VTR ซึ่งผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า DECM DE59-100 และ DE-R สามารถหาคำตอบได้สำเร็จทั้ง 30 รอบในทุกปัญหาลดลง อย่างไรก็ตาม ในปัญหาที่ 4 วิธี DE พื้นฐานทั้งสองวิธีให้ค่า Mean nf ที่สูงกว่าวิธีอื่นมาก นอกจากนี้ DE59-50 ยังล้มเหลวในการแก้ปัญหาที่ 5 ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนสูง สิ่งเหล่านี้สะท้อนให้เห็นว่า DE พื้นฐานที่ใช้ค่าพารามิเตอร์ F และ CR แบบคงที่ และใช้ค่า NP ที่ไม่เหมาะสม ทำให้เกิดการลู่เข้าสู่คำตอบที่ช้าหรือการหยุดนิ่งเมื่อเผชิญพื้นที่ค้นหาที่ยาก ขณะที่วิธี DECM สามารถหลีกเลี่ยงข้อจำกัดดังกล่าวได้ และเมื่อพิจารณาความเร็วในการลู่เข้าพบว่าวิธีที่นำเสนอให้ค่า Mean nf ที่ใกล้เคียงกับวิธี DE59-50 ในปัญหาที่ 1 2 และ 3 แต่ในปัญหาที่ 4 วิธีที่นำเสนอให้ค่า Mean nf ที่น้อยกว่าวิธี DE59-50 อย่างมาก ขณะที่ DE-R ให้ค่า Mean nf ที่มากกว่าอย่างเห็นได้ชัดในปัญหาที่ 1 2 3 และ 5 เมื่อเทียบกับวิธี DECM ซึ่งผลลัพธ์เหล่านี้แสดงให้เห็นว่า DECM สามารถแก้ปัญหาที่นำมาทดสอบได้ทั้ง 6 ปัญหา โดยทำการค้นไปยังบริเวณที่มีแนวโน้มของคำตอบที่ดีได้อย่างรวดเร็วดังแสดงได้ใน Figure 1 เมื่อพิจารณาความเสถียรในการลู่เข้าสู่คำตอบจะเห็นว่าวิธี DE59-50 และ DE59-100 ให้ค่า %SD ที่สูงมากในปัญหาที่ 2 และ 4 ขณะที่วิธีอื่น ๆ ให้ค่า %SD ที่ใกล้เคียงกัน ผลการทดลองนี้แสดงให้เห็นว่าวิธี DE59-50 มีความเสถียรในการลู่เข้าสู่คำตอบที่ต่ำกว่าวิธีเปรียบเทียบ อย่างไรก็ตาม ในปัญหาที่ 2 วิธี DECM ให้ค่า %SD ที่ต่ำกว่าวิธีเปรียบเทียบอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีที่นำเสนอมีความเสถียรในการลู่เข้าที่โดดเด่นกว่าวิธีอื่น ๆ ที่นำมาเปรียบเทียบ ผลลัพธ์ดังกล่าวจึงเป็นการสนับสนุนการใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสุ่มในช่วงที่เหมาะสมกับการใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงช่วยให้ DECM สามารถรักษาสมดุลระหว่างการค้นหาวางกว้างและการค้นหาเฉพาะที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยช่วยลดโอกาสที่ประชากรจะสูญเสียความหลากหลายเร็วเกินไป ในขณะที่การใช้เวกเตอร์จากสมาชิกที่ดีที่สุดได้จากการสุ่มในขั้นตอนการกลายพันธุ์เป็นเวกเตอร์ฐานในการกำหนดทิศทางในการค้นหาคำตอบทำให้วิธีที่นำเสนอมีการลู่เข้าที่เร็วยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้ทำการทดสอบเพื่อยืนยันนัยสำคัญทางสถิติสำหรับประสิทธิภาพความเร็วในการลู่เข้าด้วย Wilcoxon signed-rank test ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ โดยเปรียบเทียบค่าจำนวนการประเมินฟังก์ชัน (nf) ระหว่างวิธี DECM กับวิธี DE-R และ DE59-100 จากการทดลอง 30 รอบอิสระ ผลการทดสอบแสดงดัง Table 4 และ Table 5 ตามลำดับ

Table 3 Performance comparison of DE59-50, DE59-100, DE-R, and DECM over 30 independent runs

Systems	Methods	NS	Mean nf	%SD
Neurophysiology	DE59-50	30	27272.70	16.98
	DE59-100	30	76787.67	19.51
	DE-R	30	40233.67	16.99
	DECM	30	27410.43	16.54
Robot kinematics	DE59-50	30	24942.53	28.27
	DE59-100	30	57355.60	18.13
	DE-R	30	34721.30	17.70
	DECM	30	25366.70	11.41
Economics modeling	DE59-50	30	12780.60	5.96
	DE59-100	30	30193.97	4.63
	DE-R	30	21831.93	7.96
	DECM	30	12845.20	5.46
Chemical equilibrium	DE59-50	30	190249.03	47.06
	DE59-100	30	124793.33	5.70
	DE-R	30	30582.23	3.95
	DECM	30	29748.67	5.66
Combustion	DE59-50	0	-	-
	DE59-100	30	95503.70	3.79
	DE-R	30	59380.20	4.13
	DECM	30	34009.80	4.08
Automotive steering	DE59-50	0	2303.30	2.34
	DE59-100	30	4307.83	8.89
	DE-R	30	2682.10	12.03
	DECM	30	2515.53	9.92

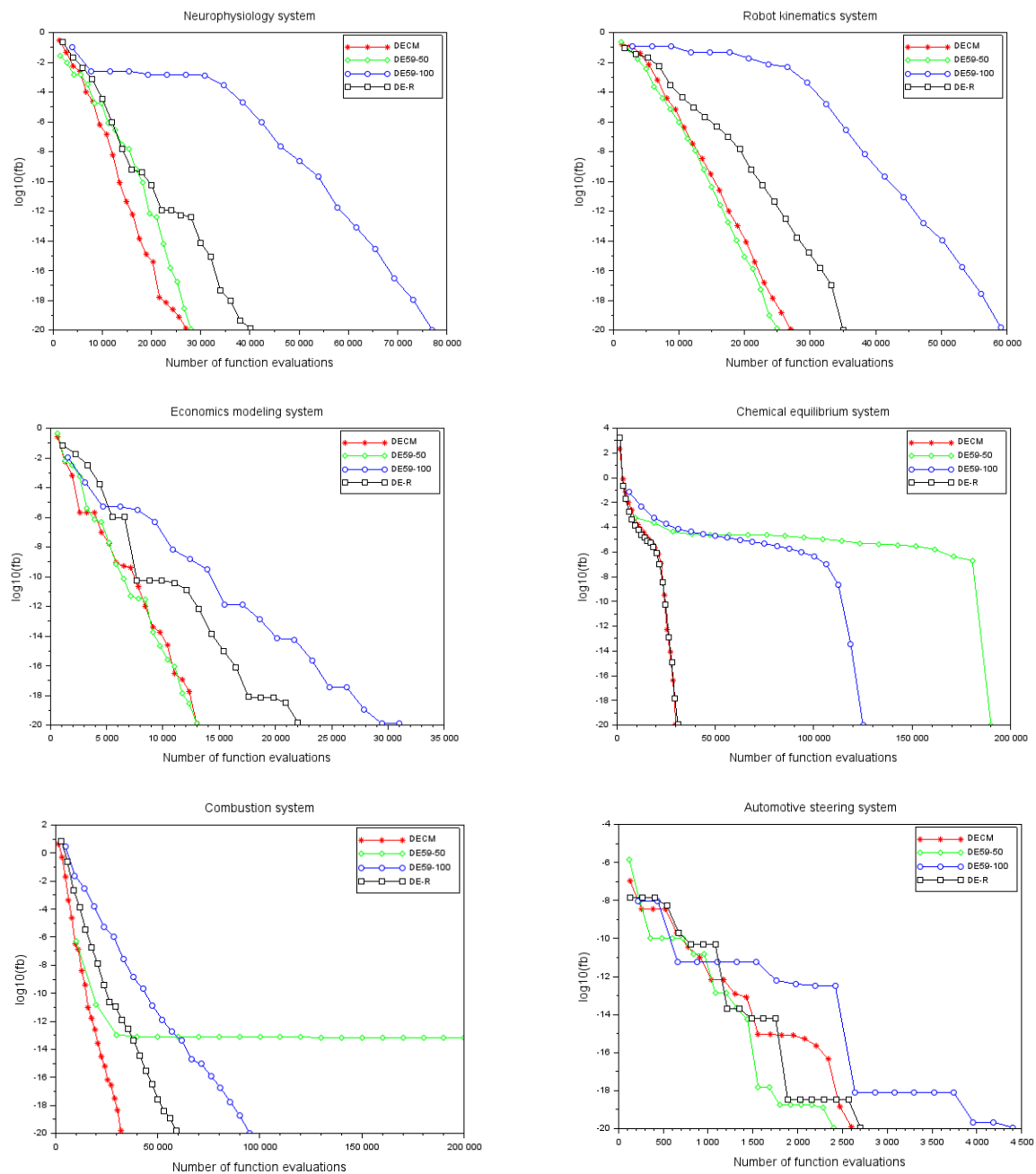


Figure 1 Convergence graphs of DECM, DE59-50, DE59-100, and DE-R for 6 test problems

Table 4 Performance comparison of DECM with DE-R in terms of nf and Wilcoxon signed-rank test results ($\alpha = 0.05$) across 30 independent runs

Problem	DECM (Mean $\pm$ SD)	DE-R (Mean $\pm$ SD)	<i>p</i> -value	Sig.
Neurophysiology	27410.43 $\pm$ 4535.17	42127.06 $\pm$ 6928.69	2.61E-08	+
Robot kinematics	25366.70 $\pm$ 2894.46	30749.87 $\pm$ 4768.14	3.90E-05	+
Economics modeling	12845.20 $\pm$ 701.55	21389.96 $\pm$ 1907.51	1.86E-09	+
Chemical equilibrium	29748.66 $\pm$ 1682.88	30745.2 $\pm$ 1893.51	3.84E-02	+
Combustion	34009.8 $\pm$ 1387.71	63409.6 $\pm$ 18552.59	1.86E-09	+
Automotive steering	2515.53 $\pm$ 249.46	2687.93 $\pm$ 316.68	2.24E-02	+
Overall Summary (<i>w / t / l</i>)				6/0/0

Table 5 Performance comparison of DECM with DE59-100 in terms of nf and Wilcoxon signed-rank test results ($\alpha = 0.05$) across 30 independent runs

Problem	DECM (Mean $\pm$ SD)	DE59-100 (Mean $\pm$ SD)	<i>p</i> -value	Sig.
Neurophysiology	27410.43 $\pm$ 4535.17	30749.86 $\pm$ 4768.14	7.11E-03	+
Robot kinematics	25366.70 $\pm$ 2894.46	55593.73 $\pm$ 9013.80	1.86E-09	+
Economics modeling	12845.20 $\pm$ 701.55	30133.03 $\pm$ 1592.84	1.86E-09	+
Chemical equilibrium	29748.66 $\pm$ 1682.88	126908.56 $\pm$ 8980.21	1.86E-09	+
Combustion	34009.8 $\pm$ 1387.71	126908.57 $\pm$ 8980.21	1.86E-09	+
Automotive steering	2515.53 $\pm$ 249.46	4182.13 $\pm$ 485.29	1.86E-09	+
Overall Summary (<i>w / t / l</i>)				6/0/0

จาก Table 4 และ Table 5 พบว่าขั้นตอนวิธี DECM มีประสิทธิภาพที่เหนือกว่าวิธี DE-R และ DE59-100 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติในทุกปัญหาทดสอบ โดยผลการเปรียบเทียบสรุปรวม (Wins/Ties/Losses) อยู่ที่ 6/0/0 ในทั้งสองกรณีเปรียบเทียบ พร้อมทั้งให้ค่า *p*-value ที่ต่ำมากในเกือบทุกปัญหาของ DE59-100 ผลการทดลองนี้แสดงให้เห็นว่าการที่วิธี DECM ใช้จำนวนการประเมินฟังก์ชันต่ำกว่าวิธีอื่นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งเป็นผลมาจากการใช้พารามิเตอร์ควบคุมและกลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงที่ได้รับการออกแบบมาอย่างเหมาะสม ทำให้ประสิทธิภาพโดยรวมของวิธีที่นำเสนอมีความโดดเด่นและน่าเชื่อถือ

(2) ผลการทดสอบความแม่นยำและความเสถียรภายใต้เกณฑ์จำนวนการประเมินฟังก์ชันสูงสุด (Max nf)

Table 6 ถึง Table 8 แสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ DECM กับวิธีเปรียบเทียบภายใต้เกณฑ์ Max nf โดยใช้ค่าต่ำสุด ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า *fb* จากการทดลอง 100 รอบอิสระ ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า DECM มีความสามารถในการค้นหาเฉพาะที่โดยให้ค่าทางสถิติต่ำที่สุดทั้งในแง่ของค่าต่ำสุดและค่าเฉลี่ยอย่างสม่ำเสมอใน

หลายกรณี ตัวอย่างที่เด่นชัดคือปัญหาที่ 1 เมื่อกำหนด Max nf ที่ 200000 วิธี DECM ให้ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3.44×10^{-149} ขณะที่ DE-R ให้ค่าเฉลี่ยเป็น 5.39×10^{-96} และ PSO-NMM-12 ให้ค่าเท่ากับ 6.14×10^{-30} แสดงให้เห็นว่า DECM มีความแม่นยำสูงกว่าวิธีเปรียบเทียบหลายลำดับชั้น เมื่อพิจารณาปัญหาที่ 2 วิธีที่นำเสนอยังให้ค่าเฉลี่ยอยู่ในระดับ 10^{-34} สำหรับทุกเงื่อนไขของ Max nf ซึ่งดีกว่าวิธีเปรียบเทียบอย่างชัดเจน โดยเฉพาะเมื่อ Max nf ที่ 50000 วิธี DE พื้นฐานทั้งสองวิธีให้ค่าเฉลี่ยอยู่ในระดับ 10^{-8} เท่านั้น อย่างไรก็ตาม ในปัญหาที่ 3 วิธี DECM ให้ค่าต่ำสุดใกล้เคียงกับวิธีเปรียบเทียบแต่มีค่าเฉลี่ยสูงกว่ามากในทุกเงื่อนไขของ Max nf ซึ่งผลลัพธ์นี้ไม่ขัดแย้งกับอัตราความสำเร็จ 100% ที่รายงานไว้ใน Table 3 แต่อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการทดลองนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดค่าคงตัวของปัญหาให้แตกต่างจากการทดลองตามเกณฑ์ VTR การปรับค่าดังกล่าวส่งผลให้ลักษณะบริเวณการค้นหามีความซับซ้อนและเพิ่มจุดต่ำสุดเฉพาะที่ โดยสาเหตุหลักที่ทำให้วิธี DECM มีค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงและติดอยู่ในจุดต่ำสุดเฉพาะที่ในเพียงบางรอบการทดลองเท่านั้น เนื่องจากวิธีที่นำเสนอมีโครงสร้างความเรียบง่ายเมื่อเผชิญกับปัญหาที่ยากและมีจุดต่ำสุดเฉพาะที่จึงทำให้ประชากรทั้งหมดถูกดึงดูดเข้าไปยังบริเวณจุดนี้และไม่สามารถหลุดพ้นออกมาเพื่อค้นหาจุดต่ำสุดวงกว้างได้ ส่วนปัญหาที่ 4 และ 5 ผลการทดลองยังคงแสดงแนวโน้มที่ดี นั่นคือ DECM ให้ค่าเฉลี่ยต่ำที่สุดในทุกเงื่อนไขที่พิจารณา โดยเฉพาะในปัญหาที่ 5 ซึ่งถือเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อน DECM สามารถให้ค่าเฉลี่ยในระดับ 10^{-24} ถึง 10^{-25} ได้อย่างสม่ำเสมอ ส่วนในปัญหาที่ 6 วิธีที่นำเสนอให้ค่าใกล้เคียงกับวิธีเปรียบเทียบในทุกกรณีซึ่งเป็นคำตอบที่มีความแม่นยำสูง ผลลัพธ์เหล่านี้แสดงถึงประสิทธิภาพในการค้นหาคำตอบที่มีความละเอียดสูงภายใต้ทรัพยากรการคำนวณที่จำกัด นอกจากนี้ ค่า SD ของ DECM โดยรวมมีค่าต่ำมากใน 5 จาก 6 ปัญหาทดสอบ ซึ่งแสดงถึงความเสถียรของวิธีที่นำเสนอเมื่อทำการทดลองซ้ำหลายครั้ง

Discussion

เมื่อพิจารณาโครงสร้างของขั้นตอนวิธี DECM พบว่าวิธีนี้มีโครงสร้างที่เรียบง่ายเมื่อเทียบกับวิธีแบบผสมผสานหรือวิธีที่ต้องใช้เทคนิคเพิ่มเติม แต่ DECM ยังสามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าหรืออย่างน้อยเทียบเท่ากับวิธีเปรียบเทียบในหลายกรณี แสดงให้เห็นว่าการปรับปรุงกลไกภายในของ DE อย่างเหมาะสมสามารถเพิ่มประสิทธิภาพได้อย่างมีนัยสำคัญ โดยสามารถอภิปรายในประเด็นสำคัญได้ดังนี้

1. ประสิทธิภาพเชิงเวลา หน่วยความจำ และผลของการจัดเรียงต่อความเร็วในการลู่เข้า เมื่อพิจารณาในด้านความซับซ้อนเชิงเวลาและการใช้หน่วยความจำของขั้นตอนวิธี พบว่าการใช้กลยุทธ์การกลายพันธุ์แบบจัดเรียงไม่สร้างภาระการคำนวณที่สูงขึ้นแต่อย่างไร เนื่องจากการจัดเรียงข้อมูลนั้นกระทำกับเวกเตอร์เป้าหมายเพียง 3 เวกเตอร์ที่ถูกสุ่มเลือกมาในแต่ละรอบการกลายพันธุ์ ซึ่งเทียบเท่ากับค่าความซับซ้อนระดับคงที่และใช้หน่วยความจำเพิ่มเติมเพียงเล็กน้อย อย่างไรก็ตาม กลไกที่เรียบง่ายนี้กลับส่งผลดีต่อความเร็วในการลู่เข้า โดยใช้เวกเตอร์ที่ดีที่สุดทำหน้าที่เป็นเวกเตอร์ฐานช่วยนำทางประชากรไปยังบริเวณที่มีแนวโน้มจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดได้เร็วขึ้นส่งผลให้จำนวนรอบของการประเมินฟังก์ชันลดลง ดังตัวอย่างในปัญหาที่ 5 วิธี DECM ใช้การประเมินฟังก์ชันเฉลี่ยน้อยกว่าวิธีเปรียบเทียบอื่น ๆ อย่างชัดเจน

Table 6 Performance comparison of DECM, DE-R, DE59-50, DE59-100, and PSO methods on Neurophysiology and Robot kinematics systems averaged over 100 independent runs

Systems	Max nf	Methods	Min	Mean	SD
Neurophysiology	50000	PSO-12	1.01E-29	1.41E-11	1.11E-10
		PSO-15	0	1.48E-11	1.39E-10
		DE-R	3.75E-36	1.06E-13	1.03E-12
		DECM	2.64E-48	1.75E-32	1.55E-31
	100000	PSO-16	0	2.37E-10	2.34E-09
		DE-R	0	1.52E-37	1.49E-36
		DECM	0	1.36E-69	1.35E-68
	200000	PSO-NMM-12	0	6.14E-30	3.71E-29
		PSO-NMM-15	0	3.09E-32	1.27E-31
		PSO-NMM-16	0	2.36E-32	1.16E-31
		DE-R	0	5.39E-96	5.39E-95
		DECM	0	3.44E-149	2.52E-148
Robot kinematics	50000	DE59-50	2.35E-36	2.08E-08	1.94E-07
		DE59-100	1.17E-23	2.44E-08	1.72E-07
		DECM	2.35E-36	9.75E-34	5.36E-33
	100000	DE59-50	2.35E-36	2.78E-11	2.76E-10
		DE59-100	2.35E-36	9.15E-24	8.02E-23
		DECM	2.35E-36	2.86E-34	1.68E-34
	200000	DE59-50	2.35E-36	2.67E-30	2.66E-29
		DE59-100	2.35E-36	3.68E-34	2.69E-34
		DECM	2.35E-36	2.75E-34	1.74E-34

2. ประเด็นเรื่องจุดต่ำสุดเฉพาะที่ในปัญหาที่มีความซับซ้อนสูง แม้ว่ากลยุทธ์การจัดเรียงจะช่วยเร่งความเร็วในการลู่เข้าได้ดี แต่ความเร็วนี้เป็นสาเหตุของข้อจำกัดในบางกรณี ดังที่ปรากฏในผลการทดลองของปัญหาที่ 3 ภายใต้เกณฑ์ Max nf ซึ่งปัญหานี้ถูกปรับค่าคงตัวให้ระบบมีความซับซ้อนสูงขึ้น แม้ว่า DECM จะสามารถหาค่าต่ำสุดได้เทียบเท่ากับวิธีอื่น แต่ค่าเฉลี่ยกลับมีค่าสูงกว่า แสดงให้เห็นว่าในบริเวณการค้นหามีจุดต่ำสุดเฉพาะที่ของปัญหาที่มีระดับความยากสูงมาก

Table 7 Performance comparison of DECM, DE-R, and PSO methods on Economics modeling and Chemical equilibrium systems averaged over 100 independent runs

Systems	Max nf	Methods	Min	Mean	SD
Economics modeling	50000	PSO-12	2.77E-30	2.52E-27	4.08E-27
		PSO-15	2.47E-33	1.03E-32	4.56E-33
		DE-R	7.40E-33	1.36E-32	4.30E-33
		DECM	9.86E-33	1.63E-03	3.27E-02
	100000	PSO-16	2.47E-33	9.69E-33	4.32E-33
		DE-R	7.40E-33	1.35D-32	4.41E-33
		DECM	9.86E-33	3.27E-03	3.27E-02
	200000	PSO-NMM-12	4.93E-33	4.91E-32	4.13E-32
		PSO-NMM-15	2.47E-33	1.02E-32	4.46E-33
		PSO-NMM-16	2.47E-33	9.60E-33	4.24E-33
		DE-R	7.40E-33	1.37E-32	4.15E-33
		DECM	9.86E-33	6.53E-04	3.27E-02
Chemical equilibrium	50000	PSO-12	9.84E-06	5.79E-04	3.04E-03
		PSO-15	3.55E-06	1.61E-03	5.10E-03
		DE-R	1.54E-34	1.05E-33	1.34E-33
		DECM	2.07E-34	4.63E-34	2.85E-34
	100000	PSO-16	4.16E-07	5.73E-04	3.05E-03
		DE-R	1.54E-34	1.08E-33	1.33E-33
		DECM	2.07E-34	5.12E-34	2.92E-34
	250000	PSO-NMM-12	2.58E-34	5.33E-04	3.04E-03
		PSO-NMM-15	1.22E-34	1.60E-03	5.11E-03
		DE-R	1.54E-34	9.19E-34	1.26E-33
		DECM	2.07E-34	4.32E-34	2.79E-34
	300000	PSO-NMM-16	5.93E-34	5.33E-04	3.04E-03
		DE-R	1.54E-34	1.19E-33	1.60E-33
		DECM	2.07E-34	4.62E-34	2.92E-34

การปรับปรุงวิธี DE โดยใช้โครงสร้างที่เรียบง่ายจึงยังไม่เพียงพอ ซึ่งส่งผลให้บางรอบการทดลองประชากรติดกับดักของจุดต่ำสุดเฉพาะที่และไม่สามารถหลุดออกมาเพื่อค้นหาจุดต่ำสุดวงกว้างได้

Table 8 Performance comparison of DECM, DE59-50, DE59-100, DE-R, and PSO methods on Combustion and Automotive steering systems averaged over 100 independent runs

System	Max nf	Methods	Min	Mean	SD
Combustion	50000	PSO-12	3.08E-11	2.76E-08	4.34E-08
		PSO-15	1.01E-11	4.88E-09	8.68E-09
		DE-R	3.68E-21	3.56E-18	9.62E-18
		DECM	1.60E-32	3.69E-24	3.00E-23
	100000	PSO-16	3.99E-12	2.22E-09	4.21E-09
		DE-R	9.83E-37	4.41E-22	1.87E-21
		DECM	3.82E-44	8.02E-24	7.65E-23
	250000	PSO-NMM-12	1.45E-33	4.69E-17	1.04E-16
		PSO-NMM-15	1.28E-33	6.91E-17	2.37E-16
		DE-R	1.29E-42	2.43E-23	1.17E-22
		DECM	6.07E-43	1.14E-24	9.10E-24
	300000	PSO-NMM-16	4.69E-34	5.05E-17	1.09E-16
		DE-R	2.49E-44	7.80E-24	3.34E-23
		DECM	1.07E-43	2.20E-25	2.05E-24
Automotive steering	50000	DE59-50	9.88E-324	4.23E-258	0
		DE59-100	1.49E-312	2.02E-249	0
		DE-R	1.05E-257	5.48E-181	0
		DECM	7.34E-245	1.72E-179	0
	100000	DE59-50	0	0	0
		DE59-100	2.34E-310	3.27E-269	0
		DE-R	0	0	0
		DECM	0	0	0
	200000	DE59-50	0	0	0
		DE59-100	0	0	0
		DE-R	0	0	0
		DECM	0	0	0

3. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวิธีอื่นในวรรณกรรม เมื่อเปรียบเทียบ DECM กับวิธีในวรรณกรรมอย่างกลุ่มวิธีแบบผสมผสานหรือวิธีที่ต้องใช้เทคนิคการเริ่มใหม่ จะเห็นได้ชัดเจนว่า DECM มีความโดดเด่นในด้านความเรียบง่ายของโครงสร้าง นั่นคือ วิธี PSO-NMM จำเป็นต้องใช้การค้นหาเฉพาะที่ของวิธี Nelder-Mead ซึ่งเพิ่มความซับซ้อนในการเขียนโปรแกรมและ

ปรับตั้งค่าพารามิเตอร์ ในขณะที่ DECM ใช้เพียงกลไกพื้นฐานของวิวัฒนาการเชิงผลต่าง แต่กลับให้ค่าความแม่นยำสูงกว่ามาก ดังเช่นในปัญหาที่ 1 ที่วิธี DECM สามารถให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์เฉลี่ยถึงระดับ 10^{-149} และเมื่อเปรียบเทียบกับวิธี DE-R ซึ่งต้องใช้กลยุทธการกลายพันธุ์ 2 รูปแบบสลับกันและต้องเพิ่มกลไกการเริ่มใหม่เพื่อป้องกันการค้นหาหยุดนิ่ง ตรงกันข้ามกับ DECM ที่ใช้เพียงกลยุทธเดียวรวมกับการสุ่มพารามิเตอร์ F และ CR ในช่วงที่เหมาะสม แต่ผลลัพธ์จาก Wilcoxon signed-rank test ยังยืนยันว่า DECM เอาชนะวิธี DE-R ในด้านจำนวนการประเมินฟังก์ชันได้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติในทุกปัญหาทดสอบ แม้ว่าผลการทดลองจะชี้ให้เห็นว่า DECM มีความสามารถในการแข่งขันกับวิธีอื่น ๆ ที่นำมาเปรียบเทียบในการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น แต่การศึกษานี้ยังมีข้อจำกัดด้านการประเมินผลอยู่ที่ปัญหาจริงจำนวน 6 ปัญหา ซึ่งเป็นปัญหามาตรฐานที่ใช้กันอย่างแพร่หลายแต่ยังไม่ครอบคลุมความซับซ้อนของปัญหาจริงทั้งหมด ดังนั้นประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนออาจเปลี่ยนแปลงได้เมื่อใช้กับปัญหาที่มีมิติสูงมากหรือมีลักษณะเฉพาะแตกต่างออกไป

Conclusions

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการเชิงผลต่างแบบปรับปรุง เรียกว่า DECM สำหรับการแก้ปัญหาจริงของระบบสมการไม่เชิงเส้น โดยแนวคิดหลักของวิธีที่เสนอคือการใช้พารามิเตอร์ควบคุมที่เหมาะสมผสมผสานกับการใช้กลยุทธการกลายพันธุ์แบบจัดเรียงตามค่าความเหมาะสม ซึ่งช่วยให้กระบวนการค้นหาสามารถรักษาสมดุลระหว่างการค้นหาวางกว้างและการค้นหาเฉพาะที่ได้มีประสิทธิภาพ ผลการทดลองบนปัญหาจริงจำนวน 6 ปัญหา แสดงให้เห็นว่า DECM สามารถหาคำตอบได้สำเร็จทุกปัญหายาภายใต้เกณฑ์ Value-To-Reach และให้ความเร็วในการลู่เข้าดีกว่าวิธีเปรียบเทียบในปัญหาส่วนใหญ่ นอกจากนี้ ภายใต้เกณฑ์จำนวนการประเมินฟังก์ชันสูงสุด DECM ยังให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำที่สุดและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำมากในหลายกรณี ซึ่งยืนยันถึงความแม่นยำของวิธีที่นำเสนอ โดยภาพรวม DECM จึงเป็นวิธีการที่มีโครงสร้างเรียบง่ายแต่มีประสิทธิภาพ และเหมาะสำหรับการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อน

อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดประการหนึ่งของการศึกษานี้คือผลการประเมินประสิทธิภาพที่โดดเด่นของขั้นตอนวิธี DECM ยังคงจำกัดอยู่ภายใต้บริบทของกลุ่มปัญหาทดสอบจำนวน 6 ปัญหาที่ใช้ในงานวิจัยนี้เท่านั้น การสรุปผลถึงความสามารถของขั้นตอนวิธีในระดับทั่วไป หรือการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในโดเมนอื่นที่มีโครงสร้างและระดับความซับซ้อนแตกต่างออกไปจึงต้องอาศัยการทดสอบเพิ่มเติม ดังนั้น งานวิจัยในอนาคตจึงควรขยายการทดสอบไปยังปัญหาจริงที่มีมิติสูงและหลากหลายมากขึ้น รวมทั้งศึกษาการปรับค่าพารามิเตอร์แบบอัตโนมัติหรือแบบปรับตัวได้ เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นและยืนยันประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีในระดับที่กว้างขึ้นต่อไป

Acknowledgments

ผู้วิจัยขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี ที่ให้การสนับสนุนอุปกรณ์ในการดำเนินงานวิจัยครั้งนี้

References

- Karr, C. L., Weck, B., & Freeman, L. M. (1998). Solutions to systems of nonlinear equations via a genetic algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 11(3), 369-375.
- Luo, Y. Z., Tang, G. J., & Zhou, L. N. (2008). Hybrid approach for solving systems of nonlinear equations using chaos optimization and quasi-Newton method. *Applied Soft Computing*, 8(2), 1068-1073.
- Mangla, C., Ahmad, M., & Uddin, M. (2021). Optimization of complex nonlinear systems using genetic algorithm. *International Journal of Information Technology*, 13(5), 1913-1925.
- Ouyang, A., Zhou, Y., & Luo, Q. (2009, August). Hybrid particle swarm optimization algorithm for solving systems of nonlinear equations. In *2009 IEEE International Conference on Granular Computing* (pp. 460-465). IEEE.
- Pourjafari, E., & Mojallali, H. (2012). Solving nonlinear equations systems with a new approach based on invasive weed optimization algorithm and clustering. *Swarm and Evolutionary Computation*, 4, 33-43.
- Raja, M. A. Z., Zameer, A., Kiani, A. K., Shehzad, A., & Khan, M. A. R. (2018). Nature-inspired computational intelligence integration with Nelder–Mead method to solve nonlinear benchmark models. *Neural Computing and Applications*, 29(4), 1169-1193.
- Ren, H., Wu, L., Bi, W., & Argyros, I. K. (2013). Solving nonlinear equations system via an efficient genetic algorithm with symmetric and harmonious individuals. *Applied Mathematics and Computation*, 219(23), 10967-10973.
- Storn, R., & Price, K. (1995). Differential evolution-a simple efficient adaptive scheme for global optimization. Tech. Rep. TR-95-012, *International Computer Science Institute*, Berkeley, Calif, USA.
- Wetweeraong, J., & Puphasuk, P. (2020). An improved differential evolution algorithm with a restart technique to solve systems of nonlinear equations. *An International Journal of Optimization and Control*, 10(1), 118-136.
- Zhang, X., Wan, Q., & Fan, Y. (2019). Applying modified cuckoo search algorithm for solving systems of nonlinear equations. *Neural Computing and Applications*, 31(2), 553-576.