วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 29 (ฉบับที่ 1) มกราคม – เมษายน พ.ศ. 2567
BURAPHA SCIENCE JOURNAL Volume 29 (No.1) January – April 2024

สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มบวก

On the Diophantine Equation $t^x + (t+3k)^y = z^2$ Where t is a Positive Integer

ดารากร จันทร์ต้อย และ สมคิด อินเทพ*
Darakorn Jantoy and Somkid Intep*
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ประเทศไทย
Mathematics Department, Faculty of Science, Burapha University, Thailand

Received : 16 November 2023, Received in revised form : 22 March 2024, Accepted : 27 March 2024
Available online : 11 April 2024

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์และที่มา : เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ โดยที่ x, y, z และ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วิธีดำเนินการวิจัย : ใช้การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งและสมบัติของสมภาคเพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

ผลการวิจัย : สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย

สรุปผลการวิจัย : สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ โดยที่ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ไม่มีผลเฉลยสำหรับ k, x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ; ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ; จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Abstract

Background and Objectives : to find the solution to the Diophantine equation $t^x + (t+3k)^y = z^2$ where k, x, y and z are non-negative integers, and t is a positive integer, which is in the form $3n+1$ for some non-negative integer n.

Methodology : proving by contradiction and various properties related to the congruent in order to find the Diophantine equation's solutions.

Main Results : the Diophantine equation $t^x + (t+3k)^y = z^2$ has no any solution.

Conclusions : the Diophantine equation $t^x + (t+3k)^y = z^2$ where t is a positive integer, which is in the form $3n+1$ for some non-negative integer n, has no any solution for k, x, y and z are non-negative integers.

Keywords : Diophantine equation ; integer solution ; non-negative integer

*Corresponding author. E-mail : intep@buu.ac.th

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ คือ สมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปและมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่มีบทบาทสำคัญในการแก้ไขปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์รวมถึงมีการประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่าง ๆ มากมาย ในหลายปีที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปต่าง ๆ อาทิเช่น ในปี 2012 Chotchaisthit (2012) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ p เป็นจำนวนเฉพาะใด ๆ เขาพบว่าผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์นี้คือ $(x,p,y,z) \in \{(2,3,2,5)\} \cup \{(r, 2^{r+1}+1, 1, 2^r+1) : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(r, 2, 2r+3, 3 \cdot 2^r) : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ อีก 5 ปีต่อมา Asthana และ Singh (Asthana & Singh, 2017) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์นี้มี 4 ผลเฉลย คือ $(x,y,z) = (1,0,2), (1,1,4), (3,2,14)$ และ $(5,1,16)$ ต่อมาในปี 2018 Burshtein (2018) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+6)^y = z^2$ เมื่อ $p,\ p+6$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x + y = 2, 3, 4$ ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังนี้ กรณีที่ 1: สำหรับจำนวนเฉพาะ p หนึ่งหมื่นจำนวนแรก และ $x = y = 1$ สมการไดโอแฟนไทน์มีผลเฉลยทั้งหมด 7 ผลเฉลย กรณีที่ 2 : เมื่อ $x = 2$ และ $y = 1$ สมการไดโอแฟนไทน์จะมีเพียงผลเฉลยเดียว และ กรณีที่ 3: สำหรับ x และ y ที่มีค่าอื่น ๆ สมการไดโอแฟนไทน์ไม่มีผลเฉลย ในปีเดียวกัน Oliveria (2018) พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+8)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยสำหรับ x, y, z ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและ $p > 3,\ p+8$ เป็นจำนวนเฉพาะ ในขณะที่ Kumar และเพื่อน ๆ (Kumar *et al.*, 2019) พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+12)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย สำหรับ x, y, z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $p = 6n+1,\ p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น ส่วนใหญ่จะเป็นการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + (p+2m)^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ $p,\ p+2m$ เป็นจำนวนเฉพาะ ในงานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ โดยที่ k, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ เราจะอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้งที่ 1 ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$

พิสูจน์ เนื่องจากจำนวนเต็ม x ใด ๆ เมื่อหารด้วย 3 จะเกิดผลลัพธ์ได้ 3 กรณี คือ หารลงตัว หรือ เหลือเศษ 1 หรือ เหลือเศษ 2 ดังนั้น สามารถเขียน x ให้อยู่ในรูปใดรูปแบบหนึ่งต่อไปนี้

$$x = 3m, \quad x = 3m+1, \quad x = 3m+2$$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบางจำนวน

กรณีที่ 1: ถ้า $x \equiv 0 \pmod{3}$ จะได้ $x^2 = (3m)^2 = 3(3m^2)$ ดังนั้น $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$

กรณีที่ 2 : ถ้า $x \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ $x^2 = (3m+1)^2 = 3(3m^2+2m)+1$ ดังนั้น $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

กรณีที่ 3: ถ้า $x \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ $x^2 = (3m+2)^2 = 3(3m^2+4m+1)+1$ ดังนั้น $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

จากกรณีที่ $1, 2$ และ 3 สรุปได้ว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

บทตั้งที่ 2 ถ้า t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + 1 = z^2$ ไม่มีผลเฉลย โดย x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติให้ (x, z) เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

เนื่องจาก $t = 3n+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} t &\equiv 1 \pmod{3} \\ t^x &\equiv 1^x \pmod{3} \\ t^x + 1 &\equiv 1+1 \pmod{3} \\ z^2 &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้งกับบทตั้งที่ 1

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + 1 = z^2$ ไม่มีผลเฉลย โดยที่ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทตั้งที่ 3 ถ้า t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + (t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย โดย k, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติให้ (y, z) เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

เนื่องจาก $t = 3n+1$ จะได้ว่า

$$t \equiv 1 \pmod 3$$
$$t+3k \equiv 1+0 \pmod 3$$
$$(t+3k)^y \equiv 1^y \pmod 3$$
$$1+(t+3k)^y \equiv 2 \pmod 3$$
$$z^2 \equiv 2 \pmod 3$$

เกิดข้อขัดแย้งกับบทตั้งที่ 1

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $1+(t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย โดยที่ k, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักของงานวิจัยนี้ โดยอาศัยบทตั้งที่ 1- 3 มาช่วยในการพิสูจน์เพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x+(t+3k)^y = z^2$ โดยแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี

ทฤษฎีบทที่ 4 สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n และ k สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x+(t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย เมื่อ $t=3n+1$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1: $x=0$ และ $y \geq 0$

แทน $x=0$ ลงในสมการไดโอแฟนไทน์ จะได้

$$1+(t+3k)^y = z^2 \tag{1}$$

โดยบทตั้งที่ 3 จะได้ว่าสมการ (1) ไม่มีผลเฉลย โดยที่ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2: $y=0$ และ $x \geq 0$

แทน $y=0$ ลงในสมการไดโอแฟนไทน์ จะได้

$$t^x+1 = z^2 \tag{2}$$

โดยบทตั้งที่ 2 จะได้ว่าสมการ (2) ไม่มีผลเฉลย โดยที่ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 3: $x \geq 1$ และ $y \geq 1$

เนื่องจาก $t=3n+1$ จะได้

$t \equiv 1 \pmod 3$ และ $t+3k \equiv 1 \pmod 3$

และได้ว่า $t^x \equiv 1^x \pmod 3$ และ $(t+3k)^y \equiv 1^y \pmod 3$

ดังนั้น $t^x + (t+3k)^y \equiv 1+1 \pmod 3$

นั่นคือ $z^2 \equiv 2 \pmod 3$

ซึ่งเกิดการขัดแย้งกับบทตั้งที่ 1

จากกรณีที่ 1, 2 และ 3 สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย สำหรับ x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ สำหรับ x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ นั้น สมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปนี้เป็นรูปแบบทั่วไปซึ่งมีทั้งที่สอดคล้องสอดและที่ครอบคลุมรูปแบบของสมการไดโอแฟนไทน์ที่นักคณิตศาสตร์ท่านอื่น ๆ เคยได้ศึกษามา อาทิเช่น

ในกรณี $t = 3n+1 = p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k = 2$ สมการไดโอแฟนไทน์ คือ $p^x + (p+6)^y = z^2$ ซึ่งเป็นสมการที่ Burshtein (2018) ได้ศึกษา โดยในกรณีนี้ สมการไดโอแฟนไทน์ไม่มีผลเฉลย อีกทั้ง Burshtein ได้ศึกษา p ที่เป็นจำนวนเฉพาะใด ๆ ซึ่งถ้า p ไม่ได้อยู่ในรูป $3n+1$ สมการไดโอแฟนไทน์อาจจะมีผลเฉลยก็ได้ เช่น กรณี $p = 5$ เมื่อ $x = y = 1$ จะได้ $z = 4$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1,1,4)$ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 11^y = z^2$ แต่อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยนี้เราได้แสดงว่า สำหรับจำนวนเต็ม $t = 3n+1$ ซึ่งรวมทั้งกรณีที่เป็นจำนวนเฉพาะและไม่เป็นจำนวนเฉพาะ สมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย

ในกรณี $t = 3n+1 = p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k = 4$ สมการไดโอแฟนไทน์ คือ $p^x + (p+12)^y = z^2$ ซึ่งเป็นสมการที่ Kumar *et al.* (2019) ได้ศึกษากรณีที่ $p = 6m+1$ และ $p+12$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ไม่มีผลเฉลย ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนว่างานวิจัยของเราครอบคลุมงานของ Kumar

ในกรณี $t = 3(1)+1 = 4$ และ $t+3k = 4+3k = p$ เป็นจำนวนเฉพาะ สมการไดโอแฟนไทน์ คือ $4^x + p^y = z^2$ ซึ่งเป็นสมการที่ Chotchaisthit (2012) ได้ศึกษา ถ้า $p = 4+3k$ เป็นจำนวนเฉพาะจะส่งผลให้สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ Chotchaisthit ทั้งนี้เนื่องจากสมการไดโอแฟนไทน์นี้จะมีผลเฉลยเมื่อ p มีค่าเป็น 2 หรือ 3 หรือ $2^{r+1}+1$ สำหรับ $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ เท่านั้น และเห็นได้ชัดเจนว่า $4+3k$ ไม่เท่ากับสามค่านี้

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ เราได้ศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $t^x + (t+3k)^y = z^2$ โดยที่ t เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูป $3n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ผลการวิจัยพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์นี้ไม่มีผลเฉลยสำหรับ k, x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เอกสารอ้างอิง

Asthana, S., & Singh, M. (2017). On the Diophantine Equation $3^x + 13^y = z^2$, *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 114*(2), 301-304.

Burshtein, N. (2018). Solution of the Diophantine Equation $p^x + (p+6)^y = z^2$ when p, $(p+6)$ are Primes and $x + y = 2, 3, 4$. *Annals of Pure and Applied Mathematics, 18*(1), 101-106.

Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine Equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a Prime Number. *American Journal Mathematics and Science, 1*(1), 191-193.

Kumar, S., Gupta, D., & Kishan, H. (2019). On the Solutions of Exponential Diophantine Equation $p^x + (p+12)^y = z^2$. *International Transactions in Mathematical Sciences and Computers, 11*(1), 1-19.

Oliveria, N. (2018). On the Solvability of the Diophantine Equation $p^x + (p+8)^y = z^2$ when $p > 3$ and $(p+8)$ are Primes, *Annals of Pure and Applied Mathematics, 18*(1), 9-13.