

สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 17^y = z^2$ On the Diophantine Equation $n^x - 17^y = z^2$

สุธน ตาดี้*

Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ประเทศไทย

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Thailand

Received : 15 May 2024, Received in revised form : 5 August 2024, Accepted : 15 August 2024

Available online : 9 September 2024

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์และที่มา : เพื่อหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 17^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้ 1. $n \equiv 0 \pmod{4}$ 2. $n \equiv 2 \pmod{4}$ และ 3. $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$

วิธีดำเนินการวิจัย : พิสูจน์โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน

ผลการวิจัย : ถ้า $n \equiv 0 \pmod{4}$ แล้วสมการมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $n \equiv 2 \pmod{4}$ แล้ว ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$

เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $\sqrt{n-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้ ถ้า $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ แล้วสมการมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

สรุปผลการวิจัย : ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ถ้า $n \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ แล้ว สมการมีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $n \equiv 2 \pmod{4}$ แล้ว สมการมีผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้

$\sqrt{n-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ; ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ; สมภาค

Abstract

Background and Objectives: to find the non-negative integer solutions (x, y, z) of the Diophantine equation $n^x - 17^y = z^2$, where n is a positive integer, which satisfies one of the following conditions: 1. $n \equiv 0 \pmod{4}$ 2. $n \equiv 2 \pmod{4}$ and 3. $n \equiv 3 \pmod{4}$ and $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$.

Methodology: to prove by using the basic concepts of number theory.

Main Results: If $n \equiv 0 \pmod{4}$, then the equation has the only non-negative integer solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. If $n \equiv 2 \pmod{4}$, then the non-negative integer solutions are $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ and $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$, where t is a non-negative integer such that $\sqrt{n-17^t}$ is an integer. Moreover, if $n \equiv 3 \pmod{4}$ and $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$, then the equation has the unique non-negative integer solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Conclusions: Let n be a positive integer. If $n \equiv 0 \pmod{4}$ or $n \equiv 3 \pmod{4}$ and $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$, then the equation has the unique solution $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. If $n \equiv 2 \pmod{4}$, then the equation has the solutions $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ and $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$, where t is a non-negative integer such that $\sqrt{n-17^t}$ is an integer.

Keywords: Diophantine equation ; non-negative integer solution ; congruence

Corresponding author. E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทนำ

เมื่อไม่นานมานี้ การหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $a^x - b^y = z^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง (Burshtein, 2019), (Elshahed & Kamarulhaili, 2020), (Dima, 2022), (Tadee, 2022), (Orosram & Unchai, 2022), (Buosi *et al.*, 2022), และ (Gope, 2023)

ในปี ค.ศ. 2019 Thongnak *et al.* (2019) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สามผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ และ $(2, 1, 1)$ และต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Burshtein (2020) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก และในปี ค.ศ. 2021 Thongnak *et al.* (2021) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และในปี ค.ศ. 2022 Rao (2022) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $23^x - 19^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(1, 1, 2)$ นอกจากนี้ในปีเดียวกัน Tadee & Laomalaw (2022) ได้ศึกษาและหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ $n \neq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในปี ค.ศ. 2023 Tadee (2023a) ได้แสดงว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 3^y = z^2$ คือ $(x, y, z) \in \{(r, 2r, 0) : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ และผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 7^y = z^2$ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ นอกจากนี้ Tadee (2023b) ได้ศึกษาและหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ Tadee (2023c) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ Chuayjan *et al.* (2023a) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 1, 2)$

นอกจากนี้ Chuayjan *et al.* (2023b) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $10^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 3)\}$ และในปีเดียวกัน Tadee & Laomalaw (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และในปี ค.ศ. 2024 Thongnak *et al.* (2024) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงได้สนใจศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์

$$n^x - 17^y = z^2 \quad (1)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน โดยเฉพาะในเรื่อง สมภาค (congruence) ดังนั้นจึงขอทบทวนสมบัติพื้นฐานของสมภาค ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (Burton, 2010, p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
- 6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

บทตั้ง 2 ให้ k เป็นจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ จะได้ว่า $2 \cdot n^k \not\equiv 1 \pmod{17}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ ดังนั้นจะแยกพิจารณา 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1: $n \equiv \pm 1 \pmod{17}$ และจาก k เป็นจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า $n^k \equiv (\pm 1)^k \equiv 1 \pmod{17}$ เพราะฉะนั้น $2 \cdot n^k \equiv 2 \pmod{17}$

กรณีที่ 2: $n \equiv \pm 2 \pmod{17}$ และจาก k เป็นจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ q และ r ซึ่งทำให้ $k = 8q + r$ โดยที่ $r \in \{0, 2, 4, 6\}$

$$\text{กรณีที่ 2.1: } r = 0 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 2)^{8q} \equiv 2 \cdot (1)^q \equiv 2 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 2.2: } r = 2 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 2)^{8q+2} \equiv 2 \cdot 2^2 \cdot (1)^q \equiv 8 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 2.3: } r = 4 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 2)^{8q+4} \equiv 2 \cdot 2^4 \cdot (1)^q \equiv 15 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 2.4: } r = 6 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 2)^{8q+6} \equiv 2 \cdot 2^6 \cdot (1)^q \equiv 9 \pmod{17}$$

กรณีที่ 3: $n \equiv \pm 4 \pmod{17}$ และจาก k เป็นจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h และ s ซึ่งทำให้ $k = 4h + s$ โดยที่ $s \in \{0, 2\}$

$$\text{กรณีที่ 3.1: } s = 0 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 4)^{4h} \equiv 2 \cdot (1)^h \equiv 2 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 3.2: } s = 2 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 4)^{4h+2} \equiv 2 \cdot 4^2 \cdot (1)^h \equiv 15 \pmod{17}$$

กรณีที่ 4: $n \equiv \pm 8 \pmod{17}$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$$\text{กรณีที่ 4.1: } r = 0 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 8)^{8q} \equiv 2 \cdot (1)^q \equiv 2 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 4.2: } r = 2 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 8)^{8q+2} \equiv 2 \cdot 8^2 \cdot (1)^q \equiv 9 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 4.3: } r = 4 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 8)^{8q+4} \equiv 2 \cdot 8^4 \cdot (1)^q \equiv 15 \pmod{17}$$

$$\text{กรณีที่ 4.4: } r = 6 \text{ จะได้ว่า } 2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot (\pm 8)^{8q+6} \equiv 2 \cdot 8^6 \cdot (1)^q \equiv 8 \pmod{17}$$

จากทั้งสี่กรณีสรุปได้ว่า $2 \cdot n^k \not\equiv 1 \pmod{17}$

ผลการวิจัย

การศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (1) นั้น ในงานวิจัยนี้จะแยกพิจารณา ดังนี้ กรณีที่ 1 $n \equiv 0 \pmod{4}$ (ซึ่งจะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3) กรณีที่ 2 $n \equiv 2 \pmod{4}$ (ซึ่งจะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4) กรณีที่ 3 $n \equiv 3 \pmod{4}$ และมีเงื่อนไขเพิ่มเติมบางประการ (ซึ่งจะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 6)

ทฤษฎีบท 3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 0 \pmod{4}$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) สมมติว่า $x > 0$ ดังนั้นจาก $n \equiv 0 \pmod{4}$ จะได้ว่า $n^x \equiv 0 \pmod{4}$ และจากสมการ (1) ดังนั้น $z^2 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $1 - 17^y = z^2$ และเนื่องจาก $z^2 \geq 0$ ดังนั้น $1 - 17^y \geq 0$ ดังนั้น $y = 0$ ทำให้ $z^2 = 0$ จะได้ว่า $z = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

ทฤษฎีบท 4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod{4}$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $\sqrt{n-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1)

กรณีที่ 1: $x=0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $y=z=0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2: $x=1$ และจากสมการ (1) $n-17^y = z^2$ จะได้ว่า $z = \sqrt{n-17^y}$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $\sqrt{n-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3: $x > 1$ และเนื่องจาก $n \equiv 2 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $n^x \equiv 2^x \equiv 0 \pmod{4}$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 0 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

จากทฤษฎีบท 4 สามารถนำไปพิสูจน์ผลงานวิจัยของ Chuayjan et al. (2023b) ได้ดังนี้

บทแทรก 5 (Chuayjan et al., 2023b) สมการไดโอแฟนไทน์ $10^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 3)\}$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $10^x - 17^y = z^2$ เนื่องจาก $10 \equiv 2 \pmod{4}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{10-17^t})$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $\sqrt{10-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $t > 0$ จะเห็นได้ชัดว่า $\sqrt{10-17^t}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $t = 0$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 3)$

ทฤษฎีบท 6 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ จะได้ว่า สมการ (1) มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (1) และเนื่องจาก $n \equiv 3 \pmod{4}$ จะได้ว่า $z^2 \equiv n^x - 17^y \equiv (-1)^x - 1 \pmod{4}$ และเนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $17^y = n^{2k} - z^2 = (n^k - z)(n^k + z)$ และจาก 17 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$n^k - z = 17^u \quad (2)$$

และ

$$n^k + z = 17^{y-u} \quad (3)$$

จากสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า $y - u \geq u$ หรือ $y \geq 2u$

และ
$$2 \cdot n^k = 17^{y-u} + 17^u = 17^u (17^{y-2u} + 1)$$

และจาก $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ ดังนั้น $17 \nmid 2 \cdot n^k$ จะได้ว่า $u = 0$ และ

$$2 \cdot n^k = 17^y + 1 \quad (4)$$

ต่อไปต้องการแสดงว่า k เป็นจำนวนคู่ พิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง สมมติว่า k เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ r ซึ่งทำให้ $k = 2r + 1$ และเนื่องจาก $n \equiv 3 \pmod{4}$ ดังนั้น $n \equiv 3, 7 \pmod{8}$ จึงแยกพิจารณาดังนี้

กรณีที่ 1: $n \equiv 3 \pmod{8}$ จะได้ว่า $2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot 3^{2r+1} \equiv 2 \cdot 3 \cdot (1)^r \equiv 6 \pmod{8}$

กรณีที่ 2: $n \equiv 7 \pmod{8}$ จะได้ว่า $2 \cdot n^k \equiv 2 \cdot 7^{2r+1} \equiv 2 \cdot 7 \cdot (1)^r \equiv 6 \pmod{8}$

จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $2 \cdot n^k \equiv 6 \pmod{8}$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $17^y + 1 \equiv 6 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $17^y + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{8}$ ดังนั้น k เป็นจำนวนคู่

สมมติว่า $y > 0$ ดังนั้น $17^y + 1 \equiv 1 \pmod{17}$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $2 \cdot n^k \equiv 1 \pmod{17}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทตั้ง 2 ดังนั้น $y = 0$ และจากสมการ (4) จะได้ว่า $k = 0$ ดังนั้น $x = 0$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z = 0$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

จากทฤษฎีบท 6 สามารถนำไปพิสูจน์ผลงานวิจัยของ Tadee & Laomalaw (2023) ได้ดังนี้

บทแทรก 7 (Tadee & Laomalaw, 2023) สมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 17^y = z^2$ เนื่องจาก $19 \equiv 3 \pmod{4}$ และ $19 \equiv 2 \pmod{17}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3, 4 และ 6 โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน ทำให้ทราบผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 17^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และสอดคล้องกับเงื่อนไข 1) $n \equiv 0 \pmod{4}$, 2) $n \equiv 2 \pmod{4}$ หรือ 3) $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ายังขาดกรณีที่ $n \equiv 1 \pmod{4}$ และกรณีที่ $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv 0, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7 \pmod{17}$ จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 17^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลย

เดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $n \equiv 2 \pmod{4}$ แล้ว สมการดังกล่าวมีผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, t, \sqrt{n-17^t})$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $\sqrt{n-17^t}$ เป็นจำนวนเต็ม

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Buosi, M., Lemos, A., Porto, A.L.P., & Santiago, D.F.G. (2022). On the Exponential Diophantine Equation

$p^x - 2^y = z^2$ with $p = k^2 + 4$ a Prime Number. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(4), 130-135.

Burshtein, N. (2019). A Short Note on Solutions of the Diophantine Equations $6^x + 11^y = z^2$ and $6^x - 11^y = z^2$ in Positive Integers x, y, z . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 20(2), 55-56.

Burshtein, N. (2020). All the Solutions of the Diophantine Equations $13^x - 5^y = z^2, 19^x - 5^y = z^2$ in Positive Integers x, y, z . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 22(2), 93-96.

Burton, D.M. (2010). *Elementary Number Theory*. 7 th Edition. New York: McGraw-Hill.

Chuayjan, W., Thongnak, S., & Kaewong, T. (2023a). On the Exponential Diophantine Equation $3^x - 5^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1), 25-28.

Chuayjan, W., Thongnak, S., & Kaewong, T. (2023b). On the Exponential Diophantine Equation $10^x - 17^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1), 21-24.

Dima, A. (2022). A Computer-Based Approach to Solving the Diophantine Equation $7^x - 3^y = 100$. *The Pump Journal of Undergraduate Research*, 5, 161-164.

Elshahed, A., & Kamarulhaili, H. (2020). On the Diophantine Equation $(4^n)^x - p^y = z^2$. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 19, 349-352.

Gope, R.C. (2023). On the Exponential Diophantine Equation $27^x - 11^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 28, 11-15.



- Orosram, W., & Unchai, A. (2022). On the Diophantine Equation $2^{2nx} - p^y = z^2$, where p is a prime. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(1), 447-451.
- Rao, C.G. (2022). On the Exponential Diophantine Equation $23^x - 19^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 27, 1-4.
- Tadee, S. (2022). On the Diophantine Equation $(p+6)^x - p^y = z^2$ where p is a Prime Number with $p \equiv 1 \pmod{28}$. *Journal of Mathematics and Informatics*, 23, 51-54.
- Tadee, S. (2023a). A Short Note on Two Diophantine Equations $9^x - 3^y = z^2$ and $13^x - 7^y = z^2$. *Journal of Mathematics and Informatics*, 24, 23-25.
- Tadee, S. (2023b). On The Diophantine Equation $3^x - p^y = z^2$ where p is Prime. *Journal of Science and Technology Thonburi University*, 7(1), 1-6.
- Tadee, S. (2023c). On the Diophantine Equation $n^x - 5^y = z^2$ where $n \equiv 11 \pmod{20}$. *Journal of KPRU Science Mathematics and Technology*, 2(1), 57-60. (in Thai)
- Tadee, S., & Laomalaw, N. (2022). On the Diophantine Equations $n^x - n^y = z^2$ and $2^x - p^y = z^2$. *Phranakhon Rajabhat Research Journal (Science and Technology)*, 17(1), 10-16. (in Thai)
- Tadee, S., & Laomalaw, N. (2023). On the Diophantine Equation $(p+2)^x - p^y = z^2$, where p is prime and $p \equiv 5 \pmod{24}$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 18(2), 149-152.
- Thongnak, S., Chuayjan, W., & Kaewong, T. (2019). On the Exponential Diophantine Equation $2^x - 3^y = z^2$. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, 7(1), 1-4.
- Thongnak, S., Chuayjan, W., & Kaewong, T. (2021). The Solution of the Exponential Diophantine Equation $7^x - 5^y = z^2$. *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty The King*, 66(703), 62-67.
- Thongnak, S., Kaewong, T., & Chuayjan, W. (2024). On the Exponential Diophantine Equation $11^x - 17^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(1), 181-184.