

เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุดจบของเส้นเซเวียนที่มีสมบัติ แบ่งครึ่งพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนด

Necessary and Sufficient Conditions for the Concurrent Point of Cevians with Area-Bisecting and Perimeter-Bisecting Properties in a Given Triangle

สมคิด อินเทพ, สุพิชญา มั่นน้อย และ อรรณพ แก้วขาว*

Somkid Intep, Supichaya Munnoi and Annop Kaewkhao*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ประเทศไทย

Mathematics department, Faculty of Science, Burapha University, Thailand

Received : 13 August 2025, Received in revised form : 30 September 2025, Accepted : 1 October 2025

Available online : 8 October 2025

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์และที่มา : ปัญหาในการแบ่งพิชชาให้บุคคลสองคนได้รับปริมาณที่เท่ากันอย่างยุติธรรมเป็นหัวข้อที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจมาอย่างยาวนาน นำไปสู่การศึกษาหลากหลายที่เกี่ยวข้องกับรูปร่างเรขาคณิตต่าง ๆ และหลักการทางเรขาคณิต เพื่อให้เกิดการแบ่งที่เท่าเทียมกันไม่เพียงแต่ในด้านพื้นที่ แต่ยังรวมถึงความยาวของขอบ (หรือ crust) ด้วย ในปี ค.ศ. 1994 Carter และ Wagon ได้แสดงให้เห็นว่าพิชชารูปวงกลมสามารถแบ่งออกเป็น 8 ชิ้นเท่า ๆ กันโดยใช้เส้นตรง 4 เส้น ที่ตัดกัน ณ จุดใด ๆ โดยมุมที่เกิดขึ้นทั้ง 8 มุมมีขนาด 45 องศา ผลลัพธ์คือ หากแจกพิชชาที่ได้แบบสลับชิ้นกันระหว่างสองคน จะทำให้แต่ละคนได้รับปริมาณที่เท่ากันพอดี ต่อมาในปี ค.ศ. 2015 Nicollier ได้ขยายแนวคิดนี้ไปยังพิชชารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยใช้เส้นแบ่ง 6 เส้น ซึ่งประกอบด้วย 3 เส้นที่ลากจากจุดภายในใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและอีก 3 เส้นที่ลากจากจุดเดียวกันไปตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยม จากนั้นแบ่งพิชชาที่ได้แบบสลับกัน ทำให้แต่ละคนได้รับทั้งพื้นที่และความยาวขอบที่เท่ากัน ในปี ค.ศ. 2019 Embacher และ Humenberger ได้ศึกษาการแบ่งรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหรือสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยใช้จุดภายในรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นในการลากเส้น แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมย่อย 6 รูป สลับการระบายสีขาว-ดำ และพบว่า ผลรวมของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมสีขาวจะเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมสีดำ ก็ต่อเมื่อ จุดภายในนั้นอยู่บนเส้นโค้งที่เรียกว่า Stammler hyperbola ซึ่งเป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน (incenter) วงกลมล้อม (circumcenter) และวงกลมนอก (excenter) ของรูปสามเหลี่ยม ต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Humenberger ได้เน้นการศึกษาสำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยเสนอว่าการแบ่งครึ่งขอบจะเกิดขึ้นได้ถ้าจุดแบ่งอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและวงกลมล้อม ส่วนการแบ่งครึ่งพื้นที่ให้เท่ากันนั้นต้องให้แนวคิดของ เส้นเซเวียน (Cevian) ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้ามโดยตัดกันที่จุดภายในจุดเดียวกัน และพบว่าการแบ่งครึ่งพื้นที่อย่างเท่าเทียมจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อ จุดตัดอยู่บนเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม จากพื้นฐานดังกล่าว งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหา เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่

ทำให้เส้นเซเวียนทั้งสามจบกัน ณ จุดนั้น สามารถแบ่งทั้งพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมได้อย่างเท่าเทียมกัน โดยเน้นเฉพาะการใช้เส้นเซเวียนเท่านั้น ซึ่งเป็นข้อจำกัดทางเรขาคณิตที่เพิ่มความลึกในการวิเคราะห์

วิธีดำเนินการวิจัย : ผู้วิจัยเริ่มจากการตั้งข้อสันนิษฐานผ่านโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (GSP) ซึ่งช่วยให้สามารถสำรวจทางภาพและตรวจสอบสมมติฐานได้อย่างยืดหยุ่น จากนั้นจึงเข้าสู่กระบวนการพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด โดยใช้ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem) เป็นหลัก ซึ่งใช้เพื่อพิสูจน์เงื่อนไขของการจบกันของเส้นเซเวียนภายในรูปสามเหลี่ยม นิยามสำคัญที่ใช้ในงานวิจัย ได้แก่ :

- เส้นเซเวียน (Cevian) คือเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดไปยังด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม
- เส้นมัธยฐาน (Median) คือเส้นเซเวียนที่ตัดด้านตรงข้าม ณ จุดกึ่งกลาง
- เส้นมัธยฐานหลัก (Main Median) คือเส้นมัธยฐานที่อยู่บนแกนสมมาตรของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- จุดจบของเส้นเซเวียน (Concurrent Point) คือจุดที่เส้นเซเวียนทั้งสามตัดกัน
- จุดเซนทรอยด์ (Centroid) คือจุดตัดของมัธยฐานทั้งสาม

ผลการวิจัย : งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาถึงเงื่อนไขทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับจุดจบของเส้นเซเวียนในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดที่ทำให้จุดดังกล่าวมีสมบัติสำคัญสองประการ ได้แก่ (1) การทำให้รูปสามเหลี่ยมถูกแบ่งออกเป็น 6 ส่วนย่อยที่มีความสำคัญทางเรขาคณิต และ (2) การทำหน้าที่เป็นจุดที่สามารถแบ่งครึ่งทั้งพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมได้ในเวลาเดียวกัน ผลการวิจัยนำไปสู่การระบุเงื่อนไขทางเรขาคณิตที่มีความสำคัญพื้นฐาน โดยสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ว่า เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุดจบของเส้นเซเวียนที่จะทำให้เกิดสมบัตการแบ่งครึ่งทั้งพื้นที่และเส้นรอบรูปนั้น มีลักษณะดังนี้: สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จุดจบต้องอยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก ขณะที่สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า จุดจบดังกล่าวจะต้องเป็นจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น ผลลัพธ์นี้แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างสามเหลี่ยมที่มีความสมมาตร (isosceles) และสามเหลี่ยมที่ไม่สมมาตร (scalene) รวมถึงชี้ให้เห็นถึงบทบาทสำคัญของจุดเซนทรอยด์ที่มีเอกลักษณ์เฉพาะสำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ความถูกต้องของผลลัพธ์เหล่านี้ได้รับการพิสูจน์อย่างเป็นระบบ โดยอาศัยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's theorem) ร่วมกับการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนทั้งในด้านของพื้นที่ย่อยภายในรูปสามเหลี่ยมและความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการแบ่งโดยเส้นเซเวียน กรอบวิธีการดังกล่าวไม่เพียงแต่สร้างความมั่นใจในความถูกต้องของข้อพิสูจน์ แต่ยังสะท้อนให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไขการเกิดจุดจบแบบเซวา (Ceva-type concurrency) กับสมบัตการแบ่งครึ่งพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ผลการวิจัยครั้งนี้จึงถือเป็นการเพิ่มความเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิตของสามเหลี่ยม โดยนำเสนอเงื่อนไขเชิงบูรณาการที่เชื่อมโยงสมบัตการแบ่งสองประการไว้ภายใต้กรอบแนวคิดของจุดจบเพียงจุดเดียว

สรุปผลการวิจัย : งานวิจัยนี้เป็นการต่อยอดจากงานที่ผ่านมา (Humenberger, 2020) โดยรวมเกณฑ์ความเท่าเทียมกันทั้งในด้านของพื้นที่และเส้นรอบรูปให้อยู่ภายใต้ข้อจำกัดทางเรขาคณิตเดียวกัน กล่าวคือการจบกันของเส้นเซเวียน โดยพบว่าเงื่อนไขทางเรขาคณิตที่แม่นยำสำหรับจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่สามารถแบ่งพื้นที่และเส้นรอบรูปได้อย่างเท่าเทียมโดยใช้เส้นเซเวียนเท่านั้น สรุปได้ดังนี้ :

- สำหรับสามเหลี่ยมหน้าจั่ว: จุดจwabต้องอยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก
- สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า: จุดจwabต้องเป็นจุดเซนทรอยด์

ผลลัพธ์นี้ช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจด้านการแบ่งอย่างเท่าเทียมในทางเรขาคณิต และสามารถนำไปใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์ เพื่อเสริมสร้างแนวคิดเรื่องมัธยฐาน จุดศูนย์กลาง และโครงสร้างสามเหลี่ยมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : แบ่งครึ่งพื้นที่ ; เซเวียน ; จุดจwab ; แบ่งครึ่งขอบ ; การแบ่งอย่างยุติธรรม

Abstract

Background and Objectives : The problem of fairly dividing a pizza between two individuals such that both receive equal quantities has been a long-standing topic of mathematical interest. This has led to a range of studies involving various geometric shapes and principles to ensure equal division not only in terms of area but also in terms of boundary length (or crust). In 1994, Carter and Wagon demonstrated that a circular pizza could be equally divided into eight slices using four straight lines intersecting at any point, such that each of the resulting eight angles measures 45 degrees. This slicing method ensured each person received equal portions when slices were alternately distributed. Later in 2015, Nicollier extended this idea to equilateral triangular pizzas, introducing a division using six lines—three connecting an arbitrary interior point to the triangle's vertices, and three drawn perpendicularly from that point to each side. By distributing these sections alternately, both individuals received equal areas and crust lengths. Further developments by Embacher and Humenberger in 2019 explored the division of acute or non-equilateral triangles into six smaller triangles from a chosen internal point. Their findings revealed that the area is equally divided when alternating regions are shaded black and white, but only if the point lies on the Stammler hyperbola—an important geometric curve containing the incenter, circumcenter, and excenter of the triangle. In 2020, Humenberger focused on unequal-sided triangular pizzas and proposed that crust bisection is guaranteed when the dividing point lies on a line connecting the incenter and circumcenter. For achieving area bisection, however, he utilized Cevians—line segments from each vertex to the opposite side intersecting at a common internal point—finding that equality in area occurs only if the intersection point lies along the triangle's medians. Building upon this rich context, the current research aims to identify the necessary and sufficient conditions for a point within a triangle such that the Cevians intersecting at that point divide both the area and the perimeter of the triangle equally. While prior studies examined these two properties individually, this study focuses on their concurrent realization using only Cevians, which introduces a unique constraint that deepens the geometric inquiry.

Methodology : The investigation began with a conjecture formed through dynamic geometry software (GSP), which allowed for visual experimentation and hypothesis testing. Once a conjecture was formed, the authors pursued a rigorous mathematical proof using classical geometric theorems—chiefly, Ceva’s Theorem, which provides conditions for concurrency of Cevians in a triangle.

Key definitions were employed for precision:

- A Cevian is a line segment drawn from a vertex of a triangle to the opposite side.
- A median is a Cevian that intersects the opposite side at its midpoint.
- The main median refers to the median corresponding to the triangle’s axis of symmetry in an isosceles triangle.
- A point of Cevian concurrency is called a concurrent point.
- A centroid is the common point of intersection of all three medians of a triangle.

Main Results : This research focuses on investigating the geometric conditions associated with the concurrency point of Cevians in a given triangle that simultaneously induces two notable properties: first, that the concurrency point partitions the triangle into six smaller subregions of equal geometric relevance; and second, that this point serves as both an area-bisecting and a perimeter-bisecting point of the triangle. The findings of the study lead to the identification of a fundamental geometric characterization. The necessary and sufficient condition for the concurrency point of the Cevians to possess both the area-bisecting and the perimeter-bisecting properties can be precisely formulated as follows: in the case of an isosceles triangle, the concurrency point must lie on the main median, whereas in the case of a scalene triangle, the concurrency point must coincide with the centroid of the triangle. These conclusions establish a clear distinction between symmetric and asymmetric triangular configurations and highlight the unique and significant role of the centroid in a scalene triangle. The validity of these results has been rigorously established through proofs constructed by employing Ceva’s theorem, in conjunction with proportional reasoning concerning both triangular areas and the segment lengths determined by the Cevians. This methodological framework not only ensures the logical soundness of the arguments but also demonstrates the deep interrelationship between classical Ceva-type concurrency conditions and the division properties of both the area and the perimeter of triangles. The outcomes of this investigation contribute to the broader understanding of triangle geometry by providing a comprehensive condition that unifies two fundamental partitioning properties within a single concurrency framework.

Conclusions : The study offers a nuanced extension to prior works (Humenberger, 2020) by merging two types of fairness criteria (area and boundary) under a single geometric constraint—the concurrency of Cevians. In summary,

the research contributes a precise characterization of geometric conditions under which a triangle can be equally divided—both in area and crust—via intersecting Cevians. The central conclusion is that:

- For isosceles triangles, the point of concurrency must lie on the main median.
- For scalene triangles, the point must be the centroid.

This result advances our understanding of fair division in geometric terms, with potential applications not only in recreational mathematics (e.g., pizza problems) but also in educational settings where concepts like medians, centroids, and Cevians are introduced.

Keywords : area-bisecting ; Cevian ; concurrent point ; crust-bisecting ; fair division

*Corresponding author. E-mail : tor_idin@buu.ac.th

Introduction

ปัญหาการแบ่งพิซซ่าให้คนสองคนโดยที่ทั้งสองได้รับปริมาณเท่ากัน เป็นหัวข้อที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจและได้ศึกษาอย่างต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 1994 Carter และ Wagon ได้นำเสนอวิธีการแบ่งพิซซ่าทรงกลมออกเป็น 8 ชิ้น โดยใช้เส้นตรง 4 เส้นที่ทำมุมต่อกันเท่า ๆ กัน (45 องศา) จากจุดใด ๆ ภายในพิซซ่า และเมื่อแจกชิ้นพิซซ่าแบบสลับกันให้คนสองคน จะทำให้ทั้งสองได้รับพิซซ่าในปริมาณเท่ากัน ต่อมาในปี ค.ศ. 2015 Nicollier ได้เสนอวิธีแบ่งพิซซ่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าออกเป็น 6 ส่วน โดยใช้เส้นตรง 3 เส้น จากจุดภายในไปยังจุดยอดของสามเหลี่ยม และอีก 3 เส้นจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับด้านของสามเหลี่ยม เมื่อแจกพิซซ่าที่ได้ให้สองคนแบบสลับกัน จะได้ว่าทั้งสองได้รับทั้งปริมาณพิซซ่าและความยาวขอบ (crust) เท่ากัน ในปี ค.ศ. 2019 Embacher และ Humenberger ได้ศึกษาการแบ่งพิซซ่ารูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหรือสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยแสดงให้เห็นว่า หากลากเส้นจากจุด P ที่อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดยอดทั้งสาม และลากไปตั้งฉากกับแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม จะเกิดรูปสามเหลี่ยมย่อย 6 รูป และเมื่อสลับระบายสีดำ-ขาว จะได้ว่าผลรวมพื้นที่สีขาวและสีดำเท่ากันก็ต่อเมื่อจุด P อยู่บนเส้นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีชื่อว่า Stammler hyperbola ซึ่งเป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน วงกลมล้อม และวงกลมนอกของรูปสามเหลี่ยม

ล่าสุดในปี ค.ศ. 2020 Humenberger ได้ขยายผลการศึกษาไปยังสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยแสดงว่า

• เงื่อนไขในการแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป คือจุด P ต้องอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและวงกลมล้อม

• ส่วนการแบ่งครึ่งพื้นที่ใช้เส้นเซเวียน (Cevians) ที่ลากจากจุดยอดแต่ละจุดไปยังด้านตรงข้ามผ่านจุด P ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เฉพาะเมื่อจุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมเท่านั้น

จากแนวคิดข้างต้น การแบ่งครึ่งเส้นรอบรูปจะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของเส้นตั้งฉาก ส่วนการแบ่งครึ่งพื้นที่จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของเส้นเซเวียน งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุด P ภายในรูป

สามเหลี่ยมใด ๆ ที่ทำให้เส้นเซเวียนทั้งสามจบกัน ณ จุดนั้น สามารถแบ่งทั้งพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสองส่วนที่เท่ากันได้ โดยมุ่งเน้นการวิเคราะห์กรณีทั่วไปของรูปสามเหลี่ยม และหาหลักเกณฑ์เชิงเรขาคณิตที่ใช้กำหนดตำแหน่งของจุด P ที่เหมาะสม

Methodology

เพื่อความสะดวกของการเขียนบทความนี้ ผู้เขียนจะใช้สัญลักษณ์ XY เพียงสัญลักษณ์เดียวในการกล่าวถึงส่วนของเส้นตรง XY ($\overline{XY}$) เส้นตรง XY ($\overleftrightarrow{XY}$) และขนาดของ XY ($|XY|$) โดยให้ผู้อ่านพิจารณาความหมายตามแต่ละบริบทนั้น ๆ

สำหรับการหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของจุดจบ P เราจะอาศัยบทนิยามและทฤษฎีบทต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ D เป็นจุดบน BC

- (1) เราจะเรียก AD ว่าเส้นเซเวียน
- (2) ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลาง BC จะเรียก AD ว่าเส้นมัธยฐาน
- (3) ถ้า AD เป็นเส้นมัธยฐาน และ $AB = AC$ จะเรียก AD ว่าเส้นมัธยฐานหลัก

บทนิยามที่ 2 กำหนดให้ P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม เราจะกล่าวว่า P เป็นจุดจบของเส้นเซเวียน ก็ต่อเมื่อ P เป็นจุดตัดร่วมของเส้นเซเวียนทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

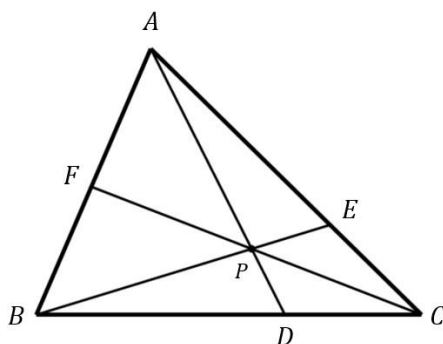


Figure 1 Point P is the point of concurrency of the Cevians AD , BE , and CF

บทนิยามที่ 3 จุดตัดของเส้นมัธยฐาน เรียกว่า จุดเซนทรอยด์ (centroid)

ทฤษฎีบทที่ 4 ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem) (Posamentier, 1984)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมีจุด D, E และ F อยู่บนด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับ

AD, BE และ CF ตัดที่จุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

เพื่อให้ผู้อ่านมีความเข้าใจตรงกันเกี่ยวกับสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม เราจะกำหนดนิยามดังนี้

บทนิยามที่ 5 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และจุด P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม เมื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P ไปตัด AB, BC และ AC ที่จุด F, D และ E ตามลำดับ แล้วเราจะกล่าวว่า

(1) จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ ถ้า

$$[AFP] + [BDP] + [CEP] = [BFP] + [CDP] + [AEP]$$

(2) จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป ถ้า

$$AF + BD + CE = BF + CD + AE$$

โดยที่ $[\bullet]$ แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม •

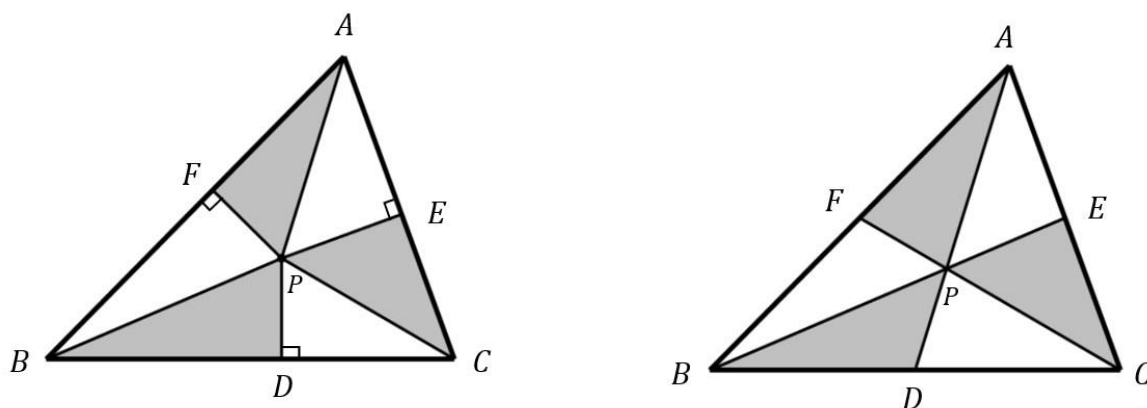


Figure 2 Division of a triangle into six regions—(left) by using perpendicular lines to the sides, and (right) by using Cevians

ในปี 2020 Humenberger ได้ศึกษาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุด P ที่เกิดจากการจวบกันของเส้นเซเวียนที่ทำให้จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6 (Humenberger, 2020) กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมี P เป็นจุดจวบของเส้นเซเวียน จะได้ว่า จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ ก็ต่อเมื่อ จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐาน

เราพบว่า Humenberger กล่าวเพียงการแบ่งครึ่งพื้นที่ จึงเป็นที่น่าสนใจว่า หากต้องการทั้งการแบ่งครึ่งพื้นที่และการแบ่งครึ่งเส้นรอบรูปนั้น เงื่อนไขของจุด P จะเป็นอย่างไร

Results

ในหัวข้อนี้ เราจะหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุดจวบ P ของเส้นเซเวียนที่ทำให้จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 7 กำหนดให้ P เป็นจุดจวบของเส้นเซเวียนของรูป $\triangle ABC$ จะได้ว่าจุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป ก็ต่อเมื่อ จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก หรือ จุด P เป็นจุดเซนทรอยด์

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้เส้นเซเวียน AD, BE และ CF ของรูป $\triangle ABC$ จวบกันที่จุด P และจุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่าจุด P อยู่บนเส้นมัธยฐาน โดยไม่เสียอรรถาธิบาย สมมติให้ P อยู่บนเส้นมัธยฐาน AD ดัง Figure 3

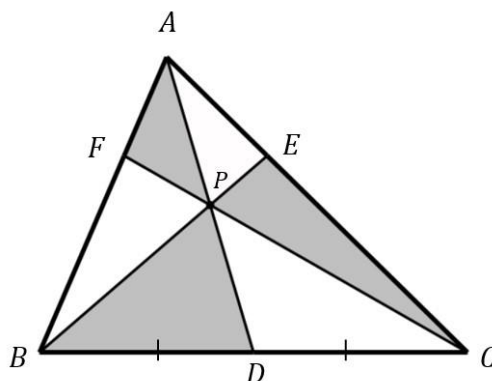


Figure 3 Point P lies on the median AD

ดังนั้น จะได้ $BD = DC$

เนื่องจากจุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป และ $BD = DC$ จะได้

$$AF + CE = FB + EA \quad (1)$$

เนื่องจาก P เป็นจุดจบของเส้นเซเวียน โดยทฤษฎีบทที่ 4 และ $BD = DC$ จะได้

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

ดังนั้น

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FB}{EC} = k \quad \text{สำหรับบางค่าคงที่ } k > 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$AF = k \cdot AE \quad \text{และ} \quad FB = k \cdot EC \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$(k-1)AE = (k-1)EC \quad (3)$$

กรณี $k = 1$

จาก (2) จะได้ $AF = AE$ และ $FB = EC$

จะได้ $AB = AF + FB = AE + EC = AC$ ดังนั้น $AB = AC$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น AD เป็นเส้นมัธยฐานหลัก

เพราะฉะนั้น จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก

กรณี $k \neq 1$

จาก (3) และ $k-1 \neq 0$ จะได้ $AE = EC$

ดังนั้น BE เป็นเส้นมัธยฐาน

โดยนิยามที่ 3 จะได้ P เป็นจุดเซนทรอยด์ของ $\triangle ABC$

($\Leftarrow$) กำหนดให้จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก หรือ จุด P เป็นจุดเซนทรอยด์ โดยบทนิยามของเส้นมัธยฐานหลักและจุดเซนทอยด์ จะได้ว่า จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐาน และโดยทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่า จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ต่อไปจะแสดงว่าจุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป

กรณีจุด P เป็นจุดเซนทอยด์ โดยบทนิยามของจุดเซนทอยด์จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าจุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป

กรณีจุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ AD เป็นเส้นมัธยฐานหลัก จะได้ $AB = AC$ ลาก BP และ CP พบ AC และ AB ที่จุด E และ F ตามลำดับ จะได้ $\triangle BDP \cong \triangle CDP$, $\triangle CEP \cong \triangle BFP$ และ $\triangle AFP \cong \triangle AEP$ ดังนั้น $BD = CD$, $CE = BF$ และ $AF = AE$ นั่นคือ $BD + CE + AF = CD + BF + AE$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทที่ 7 จะได้ว่า เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุด P เป็นดังนี้

- (1) จุด P จะต้องอยู่บนเส้นมัธยฐานหลักเท่านั้น เมื่อรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- (2) จุด P จะต้องเป็นจุดเซนทอยด์เท่านั้น เมื่อรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

Discussion

ในงานของ Humenberger (2020) พบว่า จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ ก็ต่อเมื่อ จุด P ต้องอยู่บนเส้นมัธยฐานเท่านั้น เมื่อเราพิจารณาทั้งสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป เราพบว่า จุด P จะมีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป ก็ต่อเมื่อ จุด P อยู่บนเส้นมัธยฐานหลัก หรือ จุด P เป็นจุดเซนทอยด์เท่านั้น

Conclusions

ในงานวิจัยนี้ เราใช้เส้นเซเวียนในการแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม โดยพบว่า เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของจุดจุด P ที่ทำให้จุด P มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่และแบ่งครึ่งเส้นรอบรูป คือ จุด P ต้องอยู่บนเส้นมัธยฐานหลักหรือเป็นจุดเซนทอยด์

เมื่อเราพิจารณารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เงื่อนไขของจุด P บนรูปสี่เหลี่ยมจะมีความซับซ้อนมากขึ้น การพิจารณาว่าเงื่อนไขใดของจุด P ที่ทำให้จุด P นี้มีสมบัติแบ่งครึ่งพื้นที่ หรือ แบ่งครึ่งเส้นรอบรูปจะมีความท้าทายน่าสนใจมากขึ้น

References

Carter, L., & Wagon, S. (1994). Proof without words: fair allocation of a pizza. *Mathematics Magazine*, 67(4), 267.

Embacher, F., & Humenberger, H. (2019). A note on the Stammer hyperbola. *The American Mathematical Monthly*, 126(9), 841–844.

Humenberger, H. (2020). Fair sharing of triangular pizzas. *Mathematics Magazine*, 93(3), 64-174.

Nicollier, G. (2015). Proof without words: half issues in the equilateral triangle and fair pizza sharing. *Mathematics Magazine*, 88(5), 337.

Posamentier, A. S. (1984). *Excursion in advanced euclidean geometry*. (Revised edition). USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.