

สมบัติเชิงโครงสร้างของเซตย่อยและฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐานบน B -พีชคณิต

Structural Properties of Subsets and B -Antihomomorphisms in B -Algebras

ปณชญา พัฒนางกูร^{*}, คณิศกรณ์ มุลชัยสุข, กิตติพร ทรัพย์เจริญ และ นิยม กันพานิชย์

Poonchayar Patthanangkoor^{*}, Kanittakorn Moonchaisook, Kittiporn Sapjarean and Niyom Kanpanit

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ประเทศไทย

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Rangsit Centre, Thailand

Received: 4 November 2025, Received in revised form: 18 March 2026, Accepted: 27 March 2026

Available online: 8 April 2026

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์และที่มา: โครงสร้างเชิงพีชคณิตของเซตที่ไม่เป็นเซตว่างที่มีการดำเนินการทวิภาคนั้นเป็นเนื้อหาหลักในพีชคณิตนามธรรมที่มีการศึกษามากมาย สำหรับงานวิจัยนี้จะการศึกษาโครงสร้างเชิงพีชคณิตหนึ่งที่มีโครงสร้างน่าสนใจที่เรียกว่า B -พีชคณิต แม้ที่ผ่านมาจะมีการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของ B -พีชคณิต อย่างต่อเนื่อง แต่รายละเอียดเชิงลึกเกี่ยวกับสมบัติของเซตย่อยพิเศษบางเซตย่อยและการสร้างโครงสร้างพีชคณิตบนเซตของฟังก์ชันยังไม่ครอบคลุมทุกมิติ งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นศึกษาในสองประเด็นหลัก ประการแรกคือการศึกษาและพิสูจน์สมบัติเชิงโครงสร้างของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ สำหรับ $x \in X$ เมื่อ X เป็น B -พีชคณิต พร้อมทั้งระบุเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้เซตย่อย $M(X)$ เป็นไอดีลและ B -พีชคณิตย่อย ซึ่งเป็นการเจาะลึกลงไปโครงสร้างภายในที่งานวิจัยก่อนหน้านี้ยังไม่ได้ศึกษาไว้ และประการที่สองคือการศึกษาฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐาน เพื่อสร้างโครงสร้างเชิงพีชคณิตบนเซต $AHom(X, Y)$ ซึ่งเป็นเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐานทั้งหมดจาก X ไปยัง Y เมื่อ X และ Y เป็น B -พีชคณิต ภายใต้การดำเนินการทวิภาคที่นิยามขึ้นใหม่ โดยผลการวิจัยพบว่าภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม $AHom(X, Y)$ จะเป็น B -พีชคณิตสลับที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ผลการศึกษานี้จึงเป็นการขยายขอบเขตความรู้เชิงทฤษฎีและสร้างสมบัติใหม่ในเชิงพีชคณิตของ B -พีชคณิต ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัย: งานวิจัยนี้อาศัยบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับ B -พีชคณิต ในการตรวจสอบสมบัติเชิงพีชคณิตต่าง ๆ โดยระเบียบวิธีวิจัยแบ่งเป็นสองขั้นตอนหลัก ได้แก่ การศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของเซตย่อยของ B -พีชคณิต และการศึกษาฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐาน ขั้นตอนแรก มุ่งเน้นไปที่การศึกษาสมบัติของโครงสร้างย่อยเฉพาะสองโครงสร้างคือ $M(X)$ and $C(x)$ สำหรับ $x \in X$ เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต โดยที่เซต $M(X)$ และ $C(x)$ นิยามโดย $M(X) = \{a \in X \mid (x * a) * x = a \ \forall x \in X\}$ และ $C(x) = \{y \in X \mid (x * y) * x = x\}$ งานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นที่จะทำให้ $M(X)$ เป็นไอดีลและ B -พีชคณิตย่อย ของ X ซึ่งการพิสูจน์จะอาศัยสมบัติพื้นฐานของ B -พีชคณิต ในการตรวจสอบสมบัติตามบทนิยามของ B -พีชคณิตย่อย และไอดีล ขั้นตอนที่สองมุ่งเน้นศึกษาสมบัติของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐาน และโครงสร้างของเซต $AHom(X, Y)$ ซึ่งเป็นเซตของฟังก์ชัน

B -ปฏิสัทิสสฐานทั้งหมดจาก X ไปยัง Y เมื่อ X และ Y เป็น B -พีชคณิต โดยจะนิยามการดำเนินการทวิภาคบนเซต $AHom(X, Y)$ และใช้สมบัติของ B -พีชคณิต (โดยเฉพาะอย่างยิ่งภายใต้ข้อจำกัดที่ว่า Y เป็น B -พีชคณิตสลับที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่) เพื่อพิสูจน์ว่า $AHom(X, Y)$ นั้นสอดคล้องกับสัจพจน์ทั้งหมดของ B -พีชคณิต

ผลการวิจัย: งานวิจัยนี้ทำให้ทราบสมบัติอื่น ๆ ของ B -พีชคณิต เพิ่มเติมจากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับ B -พีชคณิต ก่อนหน้านี้ ซึ่งพบว่าในกรณีที่ X เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะได้ว่า $M(X)$ เป็นไอดีลและ B -พีชคณิตย่อย ของ X นอกจากนี้ ยังพบว่าเซตย่อย $A = \{0, a\}$ เป็นไอดีลและ B -พีชคณิตย่อย ของ X สำหรับทุก $a \in X$ เช่นกัน และยังได้อีกว่า $y \in C(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x \in C(y)$ และ $x \in M(X)$ ก็ต่อเมื่อ $x \in C(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และถ้า $x \in C(y)$ และ $y \in C(z)$ แล้ว $x = z$ เมื่อ $x, y, z \in X$ นอกจากนี้ ยังสามารถสร้างโครงสร้าง B -พีชคณิต บนเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐานได้โดยกำหนดให้ X เป็น B -พีชคณิต และ Y เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ โดยที่ $M(Y) = Y$ จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันศูนย์เป็นฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐาน ดังนั้น เซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐานทั้งหมดจาก X ไป Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $AHom(X, Y)$ จึงไม่เป็นเซตว่าง ด้วยการนิยามการดำเนินการทวิภาคที่เหมาะสมบนเซตของฟังก์ชันนี้ จึงสามารถพิสูจน์ได้ว่าเซต $AHom(X, Y)$ สอดคล้องกับสัจพจน์ทั้งหมดของ B -พีชคณิต ซึ่งเซต $AHom(X, Y)$ ไม่ได้เป็นเพียงแค่ B -พีชคณิต เท่านั้น แต่ยังเป็น B -พีชคณิตสลับที่ และมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อีกด้วย

สรุปผลการวิจัย: จากการศึกษาพบว่า B -พีชคณิต มีโครงสร้างและสมบัติบางประการที่น่าสนใจ และสามารถพิสูจน์สมบัติที่สำคัญหลายประการที่เกี่ยวข้องกับ B -พีชคณิต ได้ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าเซตย่อย $M(X)$ ซึ่งเป็นเซตของสมาชิกมียะทั้งหมดของ X เมื่อ X เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะเป็นไอดีลและ B -พีชคณิตย่อย ของ X นอกจากนี้ ยังได้สมบัติต่าง ๆ ของเซตย่อย $C(x)$ อีกด้วย และที่สำคัญ งานวิจัยนี้ได้พิสูจน์การมีอยู่ของโครงสร้างเชิงพีชคณิตบนเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐาน ซึ่งพบว่าเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐานทั้งหมดจาก X ไป Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $AHom(X, Y)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ โดยมีเงื่อนไขว่า Y เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ โดยที่ $M(Y) = Y$ ซึ่งถือว่าเป็นสร้าง B -พีชคณิต ใหม่จากโครงสร้างของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสสฐาน ผลการวิจัยครั้งนี้ถือเป็นการเพิ่มพูนความเข้าใจเกี่ยวกับ B -พีชคณิต ให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น และเปิดแนวทางใหม่ ๆ สำหรับการวิจัยในอนาคต โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการศึกษาเรื่อง ไอดีล พีชคณิตผลหาร และการแปลงบน $AHom(X, Y)$ ซึ่งเป็น B -พีชคณิต ใหม่

คำสำคัญ: B -พีชคณิต; ไอดีล; B -ปฏิสัทิสสฐาน

Abstract

Background and Objectives: Algebraic structures of non-empty sets equipped with binary operations represent a fundamental subject in abstract algebra that has been extensively studied. This research focuses on an intriguing algebraic structure known as B -algebras. Although various properties of B -algebras have been continuously

investigated, in-depth details regarding the properties of certain specific subsets and the construction of algebraic structures on functional sets have not yet been comprehensively explored. The present research aims to address two primary objectives. First, it investigates and proves the structural properties of the subsets $M(X)$ and $C(x)$ for any $x \in X$, where X is a B -algebra, while identifying the necessary and sufficient conditions for the subset $M(X)$ to qualify as an ideal and a B -subalgebra. This investigation provides a deeper insight into internal structures that have remained unexplored in previous research. Second, the study examines B -antihomomorphisms to establish an algebraic structure on the set $AHom(X, Y)$, which consists of all B -antihomomorphisms from X to Y , where X and Y are B -algebras, under a newly defined binary operation. The findings reveal that, under suitable conditions, $AHom(X, Y)$ constitutes a commutative B -algebra with associative properties. Consequently, this study extends the theoretical framework and establishes new algebraic properties, contributing to a more comprehensive understanding of B -algebra theory.

Methodology: This research relies on the definitions and theorems of B -algebras to investigate various algebraic properties. The methodology is divided into two main stages: the study of the structure and properties of B -algebra subsets, and the study of B -antihomomorphism functions. The first stage focused on exploring the properties of two specific sub-structures: $M(X)$ and $C(x)$, which are defined for an arbitrary element x of the B -algebra $(X; *, 0)$. The sets $M(X)$ and $C(x)$ are defined as $M(X) = \{a \in X \mid (x * a) * x = a \ \forall x \in X\}$ and $C(x) = \{y \in X \mid (x * y) * x = x\}$, respectively. The study established the necessary conditions under which $M(X)$ constitutes both an ideal and a B -subalgebra of X . The demonstration utilized the fundamental B -algebra axioms to verify the closure and structural properties required by the definitions of a B -subalgebra and an ideal. The second stage of the study focused on investigating the properties of B -antihomomorphisms and characterizing the resulting structure of the set $AHom(X, Y)$, defined as the collection of all such mappings from a B -algebra X to a B -algebra Y . The core of the methodology here was to define a binary operation on $AHom(X, Y)$ and use the established properties of B -algebras X and Y (specifically the constraints that Y is a commutative and associative B -algebra) to prove that $AHom(X, Y)$ satisfies all the axioms of a B -algebra.

Main Results: This research established additional properties of B -algebras beyond those found in previous studies concerning B -algebras. It was found that in the case where X is a commutative B -algebra, the subset $M(X)$ is both an ideal and a B -subalgebra of X . Furthermore, it was found that the subset $A = \{0, a\}$ is an ideal of X

and a B -subalgebra of X for all $a \in X$. In addition, it was found that $y \in \mathcal{C}(x)$ if and only if $x \in \mathcal{C}(y)$ for all $x, y \in X$. Also, we found that $x \in M(X)$ if and only if $x \in \mathcal{C}(x)$, and if $x \in \mathcal{C}(y)$ and $y \in \mathcal{C}(z)$ then $x = z$, where $x, y, z \in X$. Let X be an arbitrary B -algebra, and let Y be a B -algebra that satisfies the additional properties of commutativity and associativity with $M(Y) = Y$. We see that the zero function is a B -antihomomorphism, the set of all B -antihomomorphisms from X to Y , denoted $AHom(X, Y)$, is non-empty. By defining a suitable binary operation on this set, it was successfully demonstrated that $AHom(X, Y)$, when equipped with this induced operation and the zero function, satisfies all the defining axioms of a B -algebra. Specifically, $AHom(X, Y)$ is not merely a B -algebra but is also a commutative B -algebra and possesses the associative property.

Conclusions: The study found that B -algebras possess several interesting structures and properties. Consequently, numerous important properties related to B -algebras were successfully proven. It was definitively proven that the subset $M(X)$ (the set of all medial elements of X) in a commutative B -algebra assumes the dual role of both an ideal and a B -subalgebra. Furthermore, the properties of the subset $\mathcal{C}(x)$ were provided. Crucially, the study successfully proved the existence of an algebraic structure on the set of B -antihomomorphism maps. It was concluded that the set of all B -antihomomorphisms, $AHom(X, Y)$, itself forms a commutative and associative B -algebra, provided the codomain Y satisfies these same conditions with $M(Y) = Y$. This establishes a new class of B -algebras derived from the structure of B -antihomomorphism functions. These research findings contribute to a deeper understanding of B -algebras and open up new avenues for future investigation, particularly in the study of ideals, quotient algebras, and derivations defined on the newly established B -algebra $AHom(X, Y)$.

Keywords: B -algebra; ideal; B -antihomomorphism

*Corresponding author. E-mail: poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

Introduction

การศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างเชิงพีชคณิตของเซต X ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X นั้นมีมาอย่างยาวนาน ซึ่งโครงสร้างเชิงพีชคณิตหนึ่งที่น่าสนใจคือ B -พีชคณิต ที่ถูกนิยามโดย Neggers และ Kim เมื่อปี ค.ศ. 2002 และในปีเดียวกันนี้ Kondo และ Jun ได้พิสูจน์ว่าคลาสของ B -พีชคณิต เป็นคลาสของกรุป โดยอาศัยสมบัติที่ว่า $x = 0 * (0 * x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2003 Allen *et al.* ได้ทำการพิสูจน์ว่าคลาสของ B -พีชคณิต เป็นคลาสของกรุปโดยแสดงการพิสูจน์อีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งอาศัยสมบัติที่ว่าฟังก์ชันศูนย์ถูกพันเป็นฟังก์ชันทั่วถึง การศึกษาดังกล่าวช่วยวางรากฐานการเชื่อมโยงระหว่างโครงสร้างของ B -พีชคณิต กับโครงสร้างของกรุป สำหรับการศึกษา

เกี่ยวกับโครงสร้างย่อยใน B -พีชคณิต ก็มีมาอย่างต่อเนื่อง โดยในปี ค.ศ. 2016 Endam ทำการศึกษาสมบัติของตัวศูนย์กลาง และ normalizer ของ B -พีชคณิต จากนั้นในปี ค.ศ. 2017 Abdullah และ Atshau ได้ศึกษาเกี่ยวกับไอดิลบิรุ่ม และ n -ไอดิลของ B -พีชคณิต นอกจากนี้ ยังมีการขยายขอบเขตการศึกษาไปยังฟังก์ชันที่รักษาโครงสร้างบน B -พีชคณิต โดย Al-Shehri ได้ศึกษาสมบัติของการแปลงของ B -พีชคณิต และศึกษาเกี่ยวกับเงื่อนไขที่ให้เซต $Hom(-, -)$ เป็น B -พีชคณิต เมื่อปี ค.ศ. 2010 ขณะที่ Endam และ Vilela ได้ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันสัทิสฐานบน B -พีชคณิต และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัทิสฐานที่สอง เมื่อปี ค.ศ. 2014 และต่อมาในปี ค.ศ. 2021 Yattagi *et al.* ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแปลง f_g ทางซ้ายของ B -พีชคณิต อีกทั้ง ยังมีการศึกษาเกี่ยวกับผลคูณตรงของ B -พีชคณิต โดย Lingcong และ Endam เมื่อปี ค.ศ. 2016 รวมถึงการศึกษาสมบัติของเซตย่อย $B - Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ $(\mathbb{Z}_n; *, [0]_n)$ เป็น B -พีชคณิต โดย Wicaksono *et al.* ในปี ค.ศ. 2023 อีกด้วย

แม้จะมีการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของ B -พีชคณิต อย่างต่อเนื่อง แต่พบว่ายังมีบางสมบัติของ B -พีชคณิต ที่น่าสนใจศึกษาเพิ่มเติม ดังนั้น ในงานวิจัยนี้จึงจะทำการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติอื่น ๆ ของ B -พีชคณิต โดยเริ่มศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเซต $M(X)$ และ $C(x)$ สำหรับ $x \in X$ เมื่อ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต โดยที่ $M(X)$ และ $C(x)$ นิยามโดย $M(X) = \{a \in X \mid (x * a) * x = a \ \forall x \in X\}$ และ $C(x) = \{y \in X \mid (x * y) * x = x\}$ สำหรับ $x \in X$ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการพิสูจน์สมบัติเชิงโครงสร้างของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ พร้อมทั้งระบุเงื่อนไขที่ทำให้เซต $M(X)$ เป็นไอดิลและ B -พีชคณิตย่อย นอกจากนี้ ในด้านของฟังก์ชันบน B -พีชคณิต งานวิจัยส่วนใหญ่มักมุ่งเน้นที่จะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันสัทิสฐานบน B -พีชคณิต ทั่วไป แต่การศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐานบน B -พีชคณิต ซึ่งมีการกลับลำดับของการดำเนินการ และการสร้างโครงสร้างพีชคณิตบนเซตของฟังก์ชันเหล่านี้ ยังเป็นประเด็นที่ยังไม่ได้รับการศึกษาอย่างทั่วถึง งานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายในการสร้างโครงสร้าง B -พีชคณิต บนเซตของ B -ปฏิสัทิสฐานทั้งหมด ($AHom(X, Y)$) ภายใต้ข้อกำหนดที่เหมาะสม ซึ่งถือเป็นการขยายขอบเขตทฤษฎีเชิงฟังก์ชันของ B -พีชคณิตให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เนื้อหาในลำดับถัดไปของงานวิจัยนี้ ประกอบด้วย ส่วนที่ 2 จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นที่จำเป็น ส่วนที่ 3 จะเป็นการวิเคราะห์สมบัติเชิงโครงสร้างของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ และนำเสนอการสร้างและพิสูจน์สมบัติของ B -พีชคณิต บนเซต $AHom(X, Y)$ ส่วนที่ 4 เป็นการอภิปรายผลการวิจัย และส่วนที่ 5 เป็นการสรุปผลการวิจัย

Methodology

ในงานวิจัยนี้ใช้บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ของ B -พีชคณิต ซึ่งในผลงานวิจัยของ Neggers และ Kim เมื่อปี ค.ศ. 2002 นั้นได้ให้บทนิยามของ B -พีชคณิต และ B -พีชคณิตสลับที่ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างโดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X; *, 0)$ ว่า B -พีชคณิต (B -algebra) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

$$(B1) \ x * x = 0$$

$$(B2) \ x * 0 = x$$

และ $(B3) \ (x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

ซึ่งจะเรียก 0 ว่าค่าคงตัว (constant) ของการดำเนินการ $*$

ทฤษฎีบท 1 (Neggers & Kim, 2002) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

- | | |
|---|---|
| (1) $y * z = y * (0 * (0 * z))$ | (2) $(x * y) * (0 * y) = x$ |
| (3) ถ้า $x * z = y * z$ แล้ว $x = y$ | (4) $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$ |
| (5) ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $x = y$ | (6) ถ้า $0 * x = 0 * y$ แล้ว $x = y$ |
| (7) $0 * (0 * x) = x$ | (8) $(x * z) * (y * z) = x * y$ |
| (9) $0 * (x * y) = y * x$ | (10) $x * y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $y * x = 0$ |
| (11) ถ้า $0 * x = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว $X = \{0\}$ | |

นอกจากนี้ ยังได้ว่าคลาสของ B -พีชคณิต เป็นคลาสของกลุ่ม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 (Allen et al., 2003) กำหนดให้ $(X; \circ, 0)$ เป็นกลุ่มโดยที่ 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ ถ้า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X ที่กำหนดโดย $x * y = x \circ y^{-1}$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต (และจะเรียก $(X; *, 0)$ ว่า B -พีชคณิตที่เกิดจากกลุ่ม $(X; \circ, 0)$ (group-derived B -algebra))

บทนิยาม 2 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต จะเรียก $(X; *, 0)$ ว่า B -พีชคณิตสลับที่ (commutative B -algebra) ก็ต่อเมื่อ $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 3 (Neggers & Kim, 2002) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (1) $(0 * x) * (0 * y) = y * x$ | (2) $x * (x * y) = y$ |
| (3) ถ้า $x * y = x * z$ แล้ว $y = z$ | (4) $(0 * x) * (x * y) = y * (x * (0 * x))$ |

ทฤษฎีบท 4 (Al-Shehri, 2010) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ และ $x, y, z, t \in X$ จะได้ว่า

- | | |
|---|---------------------------------|
| (1) $(z * y) * (z * x) = x * y$ | (2) $(x * y) * z = (x * z) * y$ |
| (3) $(x * z) * (y * t) = (t * z) * (y * x)$ | |

ทฤษฎีบท 5 (Allen et al., 2003) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต จะได้ว่า

- (1) ถ้า $x * y = (0 * y) * (0 * x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่

(2) ถ้า $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต ที่เกิดจากกรุป $(X;\circ,0)$ แล้ว $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ก็ต่อเมื่อ $(X;\circ,0)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

ทฤษฎีบท 6 (Abdullah & Atshan, 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต จะได้ว่า

- (1) ถ้า $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ แล้วจะได้ว่า
 - (i) $x * (y * z) = z * (y * x)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
 - (ii) ถ้า $x * y = y * x$ แล้ว $x = 0 * x$ เมื่อ $x, y \in X$
- (2) ถ้า $0 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่

บทนิยาม 3 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $\emptyset \neq I \subseteq X$ จะเรียก I ว่าไอดีล (ideal) ของ X ก็ต่อเมื่อ

- (1) $0 \in I$

และ (2) ถ้า $x * y \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 4 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $\emptyset \neq S \subseteq X$ จะเรียก S ว่า B -พีชคณิตย่อย B (B -subalgebra) ของ X ก็ต่อเมื่อ $x * y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

ทฤษฎีบท 7 (Neggers & Kim, 2002) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $\emptyset \neq N \subseteq X$ จะได้ว่า N เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X ก็ต่อเมื่อ $x * (0 * y), 0 * y \in N$ สำหรับทุก $x, y \in N$

บทนิยาม 5 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $\emptyset \neq N \subseteq X$ จะเรียก N ว่าเซตย่อยปกติ (normal subset) ของ X ก็ต่อเมื่อ $(x * a) * (y * b) \in N$ สำหรับทุก $x * y, a * b \in N$

หมายเหตุ จากบทนิยามข้างต้นจะเห็นได้ว่า ถ้า N เป็นเซตย่อยปกติของ X แล้วจะมี $x \in N$ โดยที่ $x * 0 = x \in N$ นั่นคือ $0 = (x * x) * (0 * 0) \in N$ และสำหรับทุก $x, y \in N$ จะได้ว่า $x * 0 = x \in N$ และ $y * 0 = y \in N$ ดังนั้น $x * y = (x * y) * (0 * 0) \in N$ จึงได้ว่า N เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X ด้วยเหตุนี้ จึงเรียก N ว่า B -พีชคณิตย่อยปกติ (normal B -subalgebra) ของ X ได้เช่นกัน

ทฤษฎีบท 8 (Walendziak, 2005) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ N เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X จะได้ว่า N เป็นเซตย่อยปกติของ X ก็ต่อเมื่อ $x * (x * y) \in N$ สำหรับทุก $x \in X, y \in N$

บทนิยาม 6 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต จะเรียก X ว่ามีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative) ก็ต่อเมื่อ

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยดำเนินการศึกษาสมบัติเชิงโครงสร้างของ B -พีชคณิต โดยมีกระบวนการวิจัยที่เริ่มต้นจากการศึกษาสมบัติพื้นฐานของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ ผ่านบทนิยามที่กำหนดไว้ และใช้สมบัติดังกล่าวในการวิเคราะห์เพื่อสร้างเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้เซตย่อย $M(X)$ มีสมบัติเป็นไอดิลและ B -พีชคณิตย่อย โดยผู้วิจัยได้นำสมบัติของไอดิลและ B -พีชคณิตย่อย ตามที่กำหนดไว้ในบทนิยาม 3 และ 4 มาใช้ในการทดสอบผ่านวิธีการพิสูจน์ทางตรง นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังใช้ทฤษฎีบท 2 และ 5 เป็นฐานในการขยายแนวคิดเพื่อนำสมบัติบางประการจากทฤษฎีกรุปมาปรับใช้ใน B -พีชคณิต และในขั้นตอนสุดท้าย ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างโครงสร้าง B -พีชคณิต บนเซตของฟังก์ชัน $AHom(X, Y)$ โดยกำหนดการดำเนินการทวิภาคใหม่บนเซตนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบความสอดคล้องกับสมบัติของ B -พีชคณิต ภายใต้ข้อกำหนดที่เหมาะสม

Results

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัยเชิงโครงสร้างของ B -พีชคณิต โดยเริ่มจากการศึกษาสมบัติเชิงโครงสร้างของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ ซึ่งเป็นเซตย่อยใน B -พีชคณิต จากนั้น ผู้วิจัยได้สร้างและพิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้เซตย่อย $M(X)$ มีสมบัติเป็นไอดิลและ B -พีชคณิตย่อย และในขั้นตอนสุดท้าย ผู้วิจัยได้ขยายขอบเขตการศึกษาไปสู่โครงสร้างเชิงฟังก์ชัน โดยการสร้างโครงสร้าง B -พีชคณิต บนเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทิสฐานฐาน ทั้งหมด $(AHom(X, Y))$ พร้อมทั้งพิสูจน์สมบัติการสลับที่และการเปลี่ยนหมู่ของโครงสร้างที่สร้างขึ้นใหม่นี้

บทนิยาม 7 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต จะเรียก $a \in X$ ว่าสมาชิกมัธยะ (medial element) ก็ต่อเมื่อ $(x * a) * x = a$ สำหรับทุก $x \in X$ และเขียนแทนเซตของสมาชิกมัธยะทั้งหมดของ X ด้วย $M(X)$ กล่าวคือ

$$M(X) = \{a \in X \mid (x * a) * x = a \quad \forall x \in X\}$$

บทตั้ง 9 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะได้ว่า

- (1) $a \in M(X)$ ก็ต่อเมื่อ $(x * a) * x \in M(X)$ สำหรับทุก $x \in X$
- (2) $a \in M(X)$ ก็ต่อเมื่อ $0 * a = a$
- (3) ถ้า $a \in M(X)$ แล้ว $a * (0 * y) = y * a$ สำหรับทุก $y \in X$
- (4) ถ้า $a, b \in M(X)$ แล้ว $a * b = b * a$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ $a \in M(X)$ จะได้ว่า $(x * a) * x = a$ สำหรับทุก $x \in X$ กำหนดให้ $x \in X$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (y * ((x * a) * x)) * y &= (y * ((x * a) * x)) * (y * 0) = 0 * ((x * a) * x) \\ &= x * (x * a) = a = (x * a) * x \end{aligned}$$

สำหรับทุก $y \in X$ ดังนั้น $(x * a) * x \in M(X)$ ในทางกลับกัน กำหนดให้ $(x * a) * x \in M(X)$ เมื่อ $a, x \in X$ จะได้ว่า $(y * ((x * a) * x)) * y = (x * a) * x$ สำหรับทุก $y \in X$ เนื่องจาก $(y * ((x * a) * x)) * y = (y * y) * ((x * a) * x) = 0 * ((x * a) * x) = 0 * ((x * x) * a) = 0 * (0 * a) = a$ ดังนั้น $(x * a) * x = a$ จึงได้ว่า $a \in M(X)$

(2) สมมติให้ $a \in M(X)$ และกำหนดให้ $x \in X$ จะได้ว่า

$$a = (x * a) * x = x * (x * (0 * a)) = 0 * a$$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $0 * a = a$ และกำหนดให้ $x \in X$ จะได้ว่า $(x * (0 * a)) * x = x * (x * (0 * (0 * a))) = x * (x * (0 * a)) = x * (a * (0 * x)) = (x * x) * a = 0 * a$ ดังนั้น $a = 0 * a \in M(X)$

(3) สมมติให้ $a \in M(X)$ และ $y \in X$ จะได้ว่า $a * (0 * y) = y * (0 * a) = y * a$

(4) สมมติให้ $a, b \in M(X)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a * b &= (a * b) * 0 = a * (0 * (0 * b)) = a * (0 * b) \\ &= b * (0 * a) = b * a \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 10 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะได้ว่า $M(X)$ เป็นไอดิลของ X

พิสูจน์ จะเห็นว่า $0 \in M(X)$ สมมติให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x * y \in M(X)$ และ $y \in M(X)$ โดยบทตั้ง 9 จะได้ว่า $x * y = 0 * (x * y)$ และ $y = 0 * y$ ดังนั้น $0 * x = (0 * y) * (x * y) = y * (x * y) = y * (0 * (x * y)) = y * (y * (x * 0)) = y * (y * x) = (y * 0) * (y * x) = (x * 0) * (y * y) = x * 0 = x$ โดยบทตั้ง 9 จะได้ว่า $x \in M(X)$ จึงสรุปได้ว่า $M(X)$ เป็นไอดิลของ X

ทฤษฎีบท 11 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะได้ว่า $M(X)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X

พิสูจน์ เนื่องจาก $0 \in M(X)$ ดังนั้น $\emptyset \neq M(X) \subseteq X$ ให้ $x, y \in M(X)$ จะได้ว่า $0 * x = x$ และ $0 * y = y$ โดยทฤษฎีบท 1 และ 3 จึงได้ว่า $0 * (x * y) = y * x = (0 * y) * (0 * x) = x * y$ ดังนั้น $x * y \in M(X)$ เพราะฉะนั้น $M(X)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X

ทฤษฎีบท 12 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ โดยที่ $M(X) = X$ จะได้ว่า $x = (x * y) * y$ และ $x * y = y * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า $x, y \in M(X)$ โดยบทตั้ง 9 จะได้ว่า $0 * x = x$ และ $0 * y = y$ โดยทฤษฎีบท 1 และ 3 จึงได้ว่า $(x * y) * y = (x * y) * (0 * y) = x$ และ $x * y = (0 * x) * (0 * y) = y * x$

ทฤษฎีบท 13 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ โดยที่ $M(X) = X$ จะได้ว่า เซตย่อย $A = \{0, a\}$ เป็นไอดีลและเป็น B -พีชคณิตย่อยของ X สำหรับทุก $a \in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ $a \in X$ พิจารณาเซตย่อย $A = \{0, a\} \subseteq X$ จะเห็นว่า $0 \in A$ สมมติให้ $x, y \in A$ และ $y \in A$ เมื่อ $x, y \in X$ จึงได้ว่า $a, x, y \in M(X)$ โดยบทตั้ง 9 จะได้ว่า $0 * x = x, 0 * y = y$ และ $0 * a = a$ และอาศัยทฤษฎีบท 12 จะเห็นได้ว่า $x = (x * y) * y$

ถ้า $x * y = 0 = y$ แล้ว $x = 0 * 0 = 0 \in A$

ถ้า $x * y = a = y$ แล้ว $x = a * a = 0 \in A$

ถ้า $x * y = 0$ และ $y = a$ แล้ว $x = 0 * a = a \in A$

และ ถ้า $x * y = a$ และ $y = 0$ แล้ว $x = a * 0 = a \in A$

ดังนั้น A เป็นไอดีลของ X เนื่องจาก $0 * 0 = 0 \in A, 0 * a = a \in A, a * 0 = a \in A$ และ $a * a = 0 \in A$

ดังนั้น A เป็น B -พีชคณิตย่อยของ X

ทฤษฎีบท 14 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ จะได้ว่า $0 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $x * (y * z) = (x * y) * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ สมมติให้ $0 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$ กำหนดให้ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า $(x * y) * z = (x * z) * y = (x * (0 * z)) * y = x * (y * z)$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $x * (y * z) = (x * y) * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะเห็นได้ว่า $0 * (0 * z) = (0 * 0) * z$ นั่นคือ $z = 0 * z$ สำหรับทุก $z \in X$

บทนิยาม 8 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $x, y \in X$ จะกล่าวว่า y เป็นสังยุค (conjugate) ของ x ก็ต่อเมื่อ $(x * y) * x = x$ และเขียนแทนเซตของสมาชิกของ X ทั้งหมดที่เป็นสังยุคของ x ด้วย $C(x)$ กล่าวคือ

$$C(x) = \{y \in X \mid (x * y) * x = x\}$$

บทตั้ง 15 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ และ $x, y \in X$ จะได้ว่า $y \in C(x)$ ก็ต่อเมื่อ $0 * y = x$

พิสูจน์ สมมติให้ $y \in C(x)$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $x = (x * y) * x = (x * x) * y = 0 * y$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $0 * y = x$ จะได้ว่า $x = 0 * y = (x * x) * y = (x * y) * x$ ดังนั้น $y \in C(x)$

ทฤษฎีบท 16 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

(1) $y \in C(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x \in C(y)$

(2) $x \in M(X)$ ก็ต่อเมื่อ $x \in C(x)$

(3) ถ้า $x \in C(y)$ และ $y \in C(z)$ แล้ว $x = z$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ $y \in C(x)$ โดยบทตั้ง 15 จะได้ว่า $0 * y = x$ ดังนั้น $0 * x = 0 * (0 * y) = y$ นั่นคือ $x \in C(y)$ ในทางกลับกัน ให้ $x \in C(y)$ โดยบทตั้ง 15 จะได้ว่า $0 * x = y$ ดังนั้น $0 * y = 0 * (0 * x) = x$ นั่นคือ $y \in C(x)$

(2) สมมติให้ $x \in M(X)$ จะได้ว่า $(x * x) * x = x$ นั่นคือ $x \in C(x)$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $x \in C(x)$ จะได้ว่า $(x * x) * x = x$ นั่นคือ $0 * x = x$ จึงได้ว่า $x \in M(X)$

(3) ให้ $x \in C(y)$ และ $y \in C(z)$ จะได้ว่า $0 * x = y$ และ $0 * y = z$ ดังนั้น $x = 0 * (0 * x) = 0 * y = z$

บทนิยาม 9 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *, 0')$ เป็น B -พีชคณิต จะเรียกฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ ว่า B -สาคีสฐาน (B-homomorphism) ก็ต่อเมื่อ $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และจะเรียกฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ ว่า B -ปฏิสาคีสฐาน (B-antihomomorphism) ก็ต่อเมื่อ $f(x * y) = f(y) *' f(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทตั้ง 17 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *, 0')$ เป็น B -พีชคณิต และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ เป็น B -ปฏิสาคีสฐาน จะได้ว่า (1) $f(0) = 0'$

(2) $f(0 * x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

(3) ถ้า X เป็น B -พีชคณิตสลับที่ โดยที่ $X = M(X)$ แล้วฟังก์ชันเอกลักษณ์ $I: X \rightarrow X$ เป็น B -ปฏิสาคีสฐาน

พิสูจน์ (1) $f(0) = f(0 * 0) = f(0) *' f(0) = 0'$

(2) กำหนดให้ $x \in X$ จะได้ว่า $f(0 * x) = f(x) *' f(0) = f(x) *' 0' = f(x)$

(3) สมมติให้ X เป็น B -พีชคณิตสลับที่ โดยที่ $X = M(X)$ และ $x, y \in X$ โดยทฤษฎีบท 12 จะได้ว่า $I(x * y) = x * y = y * x = I(y) * I(x)$ ดังนั้น I เป็น B -ปฏิสาคีสฐาน

บทตั้ง 18 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *, 0')$ เป็น B -พีชคณิต โดยที่ X มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ เป็น B -ปฏิสาคีสฐานจาก X ไปทั่วถึง Y จะได้ว่า

(1) ถ้า $a \in M(X)$ เมื่อ $a \in X$ แล้ว $f(a) \in M(Y)$

(2) ถ้า $y \in C(X)$ เมื่อ $x, y \in X$ แล้ว $f(y) \in C(f(x))$

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ $a \in M(X)$ เมื่อ $a \in X$ จะได้ว่า $f(a) \in Y$ และ $(x * a) * x = a$ สำหรับทุก $x \in X$

ให้ $y \in Y$ จะได้ว่ามี $x \in X$ ที่ซึ่ง $y = f(x)$ เนื่องจาก $(y *' f(a)) *' y = (f(x) *' f(a)) *' f(x) = f(a * x) *' f(x) = f(x * (a * x)) = f((x * a) * x) = f(a)$ ดังนั้น $f(a) \in M(Y)$

(2) สมมติให้ $y \in C(X)$ เมื่อ $x, y \in X$ จะได้ว่า $(x * y) * x = x$ และ $f(x), f(y) \in Y$ เนื่องจาก

$$(f(x) *' f(y)) *' f(x) = f(y * x) *' f(x) = f(x * (y * x)) = f(x) \text{ ดังนั้น } f(y) \in C(f(x))$$

ทฤษฎีบท 19 กำหนดให้ $(X; *, 0_X)$, $(Y; *', 0_Y)$ และ $(Z; \bullet, 0_Z)$ เป็น B -พีชคณิต ถ้า $f: X \rightarrow Y$ และ $g: Y \rightarrow Z$ เป็น B -ปฏิสัทิสต์ฐาน แล้วจะได้ว่า

(1) $g \circ f: X \rightarrow Z$ เป็น B -สัทิสต์ฐาน

(2) ถ้า $X = M(X)$ หรือ $Z = M(Z)$ แล้ว $g \circ f: X \rightarrow Z$ เป็น B -ปฏิสัทิสต์ฐาน

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า $(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(y) *' f(x)) = g(f(y)) \bullet g(f(x)) = (g \circ f)(y) \bullet (g \circ f)(x)$ ดังนั้น $g \circ f$ เป็น B -สัทิสต์ฐาน

(2) สมมติให้ $X = M(X)$ โดยข้อ (1) และบทตั้ง 9 จะได้ว่า $(g \circ f)(x * y) = (g \circ f)(y * x) = (g \circ f)(y) \bullet (g \circ f)(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ดังนั้น $g \circ f$ เป็น B -ปฏิสัทิสต์ฐาน ในทำนองเดียวกัน สมมติให้ $Z = M(Z)$ โดยข้อ (1) และบทตั้ง 9 จะได้ว่า $(g \circ f)(x * y) = (g \circ f)(x) \bullet (g \circ f)(y) = (g \circ f)(y) \bullet (g \circ f)(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ดังนั้น $g \circ f$ เป็น B -ปฏิสัทิสต์ฐาน

ทฤษฎีบท 20 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *', 0')$ เป็น B -พีชคณิต และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ เป็น B -ปฏิสัทิสต์ฐาน จะได้ว่า

(1) ถ้า S เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X แล้ว $f(S)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ Y

(2) ถ้า S เป็น B -พีชคณิตย่อยสลับที่ ของ X และ $M(S) = S$ แล้ว $f(S)$ เป็น B -พีชคณิตย่อยสลับที่ ของ Y

(3) ถ้า T เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ Y แล้ว $f^{-1}(T)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X โดยที่ $\ker(f) \subseteq f^{-1}(T)$ เมื่อ $\ker(f) = \{x \in X | f(x) = 0'\}$

(4) ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและ Y มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ แล้ว $f(N)$ เป็นเซตย่อยปกติของ Y สำหรับทุกเซตย่อย N ของ X โดยที่ $N \neq \emptyset$

(5) ถ้า Y มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ แล้ว $f^{-1}(T)$ เป็นเซตย่อยปกติของ X สำหรับทุกเซตย่อย T ของ Y โดยที่ $T \neq \emptyset$

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ S เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X จะได้ว่า $\emptyset \neq S \subseteq X$ โดยที่ $0 \in S$ โดยบทตั้ง 17 จะได้ว่า $0' = f(0) \in f(S)$ นั่นคือ $\emptyset \neq f(S) \subseteq Y$ กำหนดให้ $x, y \in f(S)$ จะได้ว่ามี $x_1, y_1 \in S$ ที่ทำให้ $x = f(x_1)$ และ $y = f(y_1)$ เนื่องจาก S เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ X ดังนั้น $y_1 * x_1 \in S$ จึงได้ว่า $x *' y = f(x_1) *' f(y_1) = f(y_1 * x_1) \in f(S)$ เพราะฉะนั้น $f(S)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ Y

(2) ให้ S เป็น B -พีชคณิตย่อยสลับที่ ของ X และ $M(S) = S$ กำหนดให้ $x, y \in f(S)$ จะได้ว่ามี $x_1, y_1 \in S$ ที่ทำให้ $x = f(x_1)$ และ $y = f(y_1)$ เนื่องจาก $M(S) = S$ ดังนั้น $x_1, y_1 \in M(S)$ จึงได้ว่า $0 * x_1 = x_1$ และ $0 * y_1 = y_1$ จากข้อ (1) จะได้ว่า $f(S)$ เป็น B -พีชคณิตย่อย ของ Y เนื่องจาก $x *' (0' *' y) =$

$$\begin{aligned} f(x_1) *' (f(0) *' f(y_1)) &= f(x_1) *' f(y_1 * 0) = f((y_1 * 0) * x_1) = f(y_1 * x_1) = \\ f(y_1 * (0 * x_1)) &= f(x_1 * (0 * y_1)) = f(0 * y_1) *' f(x_1) = f(y_1) *' f(x_1) = \\ f(x_1 * y_1) &= f((x_1 * 0) * y_1) = f(y_1) *' f(x_1 * 0) = f(y_1) *' (f(0) *' f(x_1)) = \\ y *' (0' *' x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(S)$ เป็น B -พีชคณิตย่อยสลับที่ของ Y

(3) สมมติให้ T เป็น B -พีชคณิตย่อยของ Y จะได้ว่า $\emptyset \neq T \subseteq Y$ โดยที่ $0' \in T$ โดยบทตั้ง 17 จะได้ว่า $0' = f(0) \in T$ ดังนั้น $0 \in f^{-1}(T)$ นั่นคือ $\emptyset \neq f^{-1}(T) \subseteq X$ กำหนดให้ $x_1, x_2 \in f^{-1}(T)$ จะได้ว่า $f(x_1), f(x_2) \in T$ ดังนั้น $f(x_1 * x_2) = f(x_2) *' f(x_1) \in T$ จึงได้ว่า $x_1 * x_2 \in f^{-1}(T)$ ดังนั้น $f^{-1}(T)$ เป็น B -พีชคณิตย่อยของ X และถ้า $x \in \ker(f)$ แล้ว $f(x) = 0' \in T$ จึงได้ว่า $x \in f^{-1}(T)$ ดังนั้น $\ker(f) \subseteq f^{-1}(T)$

(4) ให้ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและ Y มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ให้ $\emptyset \neq N \subseteq X$ จะได้ว่า $\emptyset \neq f(N) \subseteq Y$ สมมติให้ $y \in Y$ และ $x \in f(N)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นจะมี $n \in N$ และ $a \in X$ ที่ทำให้ $x = f(n)$ และ $y = f(a)$ จึงได้ว่า $y *' (y *' x) = f(a) *' (f(a) *' f(n)) = (f(a) *' f(a)) *' f(n) = 0' *' f(n) = f(0) *' f(n) = f(n * 0) = f(n)$ นั่นคือ $y *' (y *' x) \in f(N)$ จึงได้ว่า $f(N)$ เป็นเซตย่อยปกติของ Y

(5) สมมติให้ Y มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ และกำหนดให้ $\emptyset \neq T \subseteq Y$ จะได้ว่า $\emptyset \neq f^{-1}(T) \subseteq X$ สมมติให้ $x \in X$ และ $y \in f^{-1}(T)$ จะได้ว่า $f(x) \in Y$ และ $f(y) \in T$ ดังนั้น $f(x * (x * y)) = f(x * y) *' f(x) = (f(y) *' f(x)) *' f(x) = f(y) *' (f(x) *' f(x)) = f(y) *' 0' = f(y)$ นั่นคือ $f(x * (x * y)) \in T$ จึงได้ว่า $x * (x * y) \in f^{-1}(T)$ โดยทฤษฎีบท 8 จึงได้ว่า $f^{-1}(T)$ เป็นเซตย่อยปกติของ X

ทฤษฎีบท 21 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *, 0')$ เป็น B -พีชคณิต และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow Y$ เป็น B -ปฏิสัทิสฐาน จะได้ว่า $\ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0'\}$ เป็นไอดิลของ X

พิสูจน์ เนื่องจาก $f(0) = 0'$ ดังนั้น $0 \in \ker(f)$ สมมติให้ $x * y \in \ker(f)$ และ $y \in \ker(f)$ จะได้ว่า $f(x * y) = 0' = f(y)$ เนื่องจาก $f(x) = f(x) *' 0' = f(x) *' f(y) = f(y * x) = f(0 * (x * y)) = f(x * y) *' f(0) = 0' *' 0' = 0'$ ดังนั้น $x \in \ker(f)$ เพราะฉะนั้น $\ker(f)$ เป็นไอดิลของ X

บทนิยาม 10 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ และ $(Y; *, 0')$ เป็น B -พีชคณิต จะเขียนแทนเซตของ B -ปฏิสัทิสฐานทั้งหมดจาก X ไปยัง Y ด้วย $AHom(X, Y)$ และกำหนดการดำเนินการ Δ บน $AHom(X, Y)$ ดังนี้ สำหรับทุก $f, g \in AHom(X, Y)$ กำหนดให้ $f\Delta g: X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$(f\Delta g)(x) = g(x) *' f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in X$$

ทฤษฎีบท 22 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $(Y;*',0')$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ถ้า $f, g \in A\text{Hom}(X, Y)$ แล้วจะได้ว่า $f\Delta f$ เป็นฟังก์ชันศูนย์และ $f\Delta g \in A\text{Hom}(X, Y)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f, g \in A\text{Hom}(X, Y)$ เนื่องจาก $(f\Delta f)(x) = f(x) *' f(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in X$ ดังนั้น $f\Delta f$ เป็นฟังก์ชันศูนย์ กำหนดให้ $x, y \in X$ จะได้ว่า $(f\Delta g)(x * y) = g(x * y) *' f(x * y)$

$$\begin{aligned} &= (g(y) *' g(x)) *' (f(y) *' f(x)) = \\ &= g(y) *' ((f(y) *' f(x)) *' (0' *' g(x))) = \\ &= g(y) *' (f(y) *' (f(x) *' (0' *' g(x)))) = \\ &= (g(y) *' f(y)) *' (f(x) *' (0' *' g(x))) = \\ &= (g(y) *' f(y)) *' (g(x) *' (0' *' f(x))) = \\ &= (g(y) *' f(y)) *' ((g(x) *' 0') *' f(x)) = (g(y) *' f(y)) *' (g(x) *' f(x)) = \\ &= (f\Delta g)(y) *' (f\Delta g)(x) \quad \text{ดังนั้น } f\Delta g \in A\text{Hom}(X, Y) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 23 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $(Y;*',0')$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ โดยที่ $M(Y) = Y$ จะได้ว่า $(A\text{Hom}(X, Y); \Delta, \theta)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ เมื่อ θ เป็นฟังก์ชันศูนย์

พิสูจน์ กำหนดให้ $f, g, h \in A\text{Hom}(X, Y)$ และ $x \in X$ จากบทตั้ง 22 จะได้ว่า $f\Delta f = \theta$ และเนื่องจาก $f(x) \in Y$ จึงได้ว่า $f(x) \in M(Y)$ โดยบทตั้ง 9 จึงได้ว่า $0' *' f(x) = f(x)$ ดังนั้น $(f\Delta \theta)(x) = \theta(x) *' f(x) = 0' *' f(x) = f(x)$ นั่นคือ $f\Delta \theta = f$ และเนื่องจาก $((f\Delta g)\Delta h)(x) = h(x) *' (f\Delta g)(x) = h(x) *' (g(x) *' f(x)) = (h(x) *' g(x)) *' f(x) = (g(x) *' h(x)) *' f(x) = ((g(x) *' 0') *' h(x)) *' f(x) = ((g(x) *' \theta(x)) *' h(x)) *' f(x) = ((\theta\Delta g)(x) *' h(x)) *' f(x) = (h\Delta(\theta\Delta g))(x) *' f(x) = (f\Delta(h\Delta(\theta\Delta g)))(x)$ ดังนั้น $(f\Delta g)\Delta h = f\Delta(h\Delta(\theta\Delta g))$ จึงได้

ว่า $(A\text{Hom}(X, Y); \Delta, \theta)$ เป็น B -พีชคณิต และจะเห็นได้ว่า $(f\Delta(\theta\Delta g))(x) = (\theta\Delta g)(x) *' f(x) = (g(x) *' \theta(x)) *' f(x) = (g(x) *' 0') *' f(x) = (f(x) *' 0') *' g(x) = (f(x) *' \theta(x)) *' g(x) = (\theta\Delta f)(x) *' g(x) = (g\Delta(\theta\Delta f))(x)$ และ $((f\Delta g)\Delta h)(x) = h(x) *' (f\Delta g)(x) = h(x) *' (g(x) *' f(x)) = (h(x) *' g(x)) *' f(x) = (g\Delta h)(x) *' f(x) = (f\Delta(g\Delta h))(x)$ ดังนั้น $f\Delta(\theta\Delta g) = g\Delta(\theta\Delta f)$ และ $(f\Delta g)\Delta h = f\Delta(g\Delta h)$ เพราะฉะนั้น $(A\text{Hom}(X, Y); \Delta, \theta)$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่ ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

บทนิยาม 11 กำหนดให้ $(X;*,0)$ และ $(Y;*',0')$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ถ้า $\emptyset \neq S \subseteq X$ และ $\emptyset \neq A \subseteq A\text{Hom}(X,Y)$ แล้วจะเรียก $S^\perp$ และ $A^\perp$ ว่าเป็นเซตย่อยเชิงตั้งฉาก (orthogonal subset) ของ S และ A ตามลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$S^\perp = \{f \in A\text{Hom}(X,Y) | f(x) = 0' \quad \forall x \in S\}$$

และ

$$A^\perp = \{x \in X | f(x) = 0' \quad \forall f \in A\}$$

ทฤษฎีบท 24 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็น B -พีชคณิต และ $(Y;*',0')$ เป็น B -พีชคณิตสลับที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ โดยที่ $M(Y) = Y$ ถ้า $\emptyset \neq S \subseteq X$ และ $\emptyset \neq A \subseteq A\text{Hom}(X,Y)$ แล้วจะได้ว่า

- (1) $S^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยปกติ และเป็นไอดิลของ $A\text{Hom}(X,Y)$
- (2) $A^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยปกติ และเป็นไอดิลของ X

พิสูจน์ กำหนดให้ $\emptyset \neq S \subseteq X$ และ $\emptyset \neq A \subseteq A\text{Hom}(X,Y)$

(1) เนื่องจาก $\theta(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in S$ เมื่อ θ เป็นฟังก์ชันศูนย์ ดังนั้น $\theta \in S^\perp$ นั่นคือ $\emptyset \neq S^\perp \subseteq A\text{Hom}(X,Y)$ โดยทฤษฎีบท 23 จึงได้ว่า $(A\text{Hom}(X,Y); \Delta, \theta)$ เป็น B -พีชคณิต สมมติให้ $f, g \in S^\perp$ จะได้ว่า $f, g \in A\text{Hom}(X,Y)$ โดยที่ $f(x) = g(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in S$ โดยบทตั้ง 22 จะได้ว่า $f\Delta g \in A\text{Hom}(X,Y)$ เนื่องจาก $(f\Delta g)(x) = g(x) *' f(x) = 0' *' 0' = 0' = \theta(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ จึงได้ว่า $f\Delta g = \theta \in S^\perp$ ดังนั้น $S^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยของ $A\text{Hom}(X,Y)$ ต่อไปสมมติให้ $f\Delta g, h\Delta k \in S^\perp$ จะได้ว่า $(f\Delta g)(x) = (h\Delta k)(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in S$ ดังนั้น สำหรับทุก $x \in S$ จะได้ว่า $((f\Delta g)\Delta(h\Delta k))(x) = (((f\Delta h)\Delta g)\Delta k)(x) = ((f\Delta (g\Delta(\theta\Delta h))))\Delta k)(x) = ((f\Delta((g\Delta\theta)\Delta h))\Delta k)(x) = (((f\Delta g)\Delta h)\Delta k)(x) = ((f\Delta g)\Delta(h\Delta k))(x) = (h\Delta k)(x) *' (f\Delta g)(x) = 0' *' 0' = 0'$ ดังนั้น $(f\Delta g)\Delta(h\Delta k) \in S^\perp$ นั่นคือ $S^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยปกติของ $A\text{Hom}(X,Y)$ สมมติให้ $g, f\Delta g \in S^\perp$ จะได้ว่า $g, f\Delta g \in A\text{Hom}(X,Y)$ โดยที่ $g(x) = (f\Delta g)(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in S$ เนื่องจาก $f(x) = 0' *' f(x) = g(x) *' f(x) = (f\Delta g)(x) = 0'$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ $f \in S^\perp$ ดังนั้น $S^\perp$ เป็นไอดิลของ $A\text{Hom}(X,Y)$

(2) เนื่องจาก $f(0) = 0'$ สำหรับทุก $f \in A$ จึงได้ว่า $0 \in A^\perp$ นั่นคือ $\emptyset \neq A^\perp \subseteq X$ กำหนดให้ $x, y \in A^\perp$ จะได้ว่า $x, y \in X$ โดยที่ $f(x) = 0' = f(y)$ สำหรับทุก $f \in A$ เนื่องจาก $x * y \in A$ โดยที่ $f(x * y) = f(y) *' f(x) = 0' *' 0' = 0'$ สำหรับทุก $f \in A$ จึงได้ว่า $x * y \in A^\perp$ ดังนั้น $A^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยของ X

ต่อไปสมมติให้ $x * y, a * b \in A^\perp$ จะได้ว่า $x * y, a * b \in X$ โดยที่ $f(x * y) = 0' = f(a * b)$ สำหรับทุก $f \in A$ ดังนั้น สำหรับทุก $f \in A$ จะได้ว่า $f((x * a) * (y * b)) = f(((x * a) * y) * b) = f((x * (y * (0 * a))) * b) = f((x * (y * a)) * b) = f(((x * y) * a) * b) =$

$f((x * y) * (a * b)) = f(a * b) *' f(x * y) = 0' *' 0' = 0'$ ดังนั้น $(x * a) * (y * b) \in A^\perp$ นั่นคือ $A^\perp$ เป็น B -พีชคณิตย่อยปกติ ของ X สมมติให้ $y, x * y \in A^\perp$ จะได้ว่า $y, x * y \in X$ โดยที่ $f(y) = 0' = f(x * y)$ สำหรับทุก $f \in A$ เนื่องจาก $f(x) = 0' *' f(x) = f(y) *' f(x) = f(x * y) = 0'$ สำหรับทุก $f \in A$ ดังนั้น $x \in A^\perp$ เพราะฉะนั้น $A^\perp$ เป็นไอดิลของ X

Discussion

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า B -พีชคณิต มีโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ที่น่าสนใจ โดยสามารถพิสูจน์สมบัติสำคัญหลายประการเพิ่มเติมจากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับ B -พีชคณิต ก่อนหน้านี้ได้ โดยสมบัติต่าง ๆ ของเซตย่อย $M(X)$ และ $C(x)$ ในงานวิจัยนี้ ถือเป็นการขยายผลจากงานวิจัยของ Neggers และ Kim (ปี ค.ศ. 2002) และ Allen *et al.* (ปี ค.ศ. 2003) ซึ่งเดิมมุ่งเน้นไปที่สมบัติพื้นฐานและการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่าง B -พีชคณิต กับโครงสร้างกรุป ในขณะที่งานวิจัยชิ้นนี้ได้เจาะลึกลงไปโครงสร้างภายใน โดยการระบุเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้เซตย่อย $M(X)$ เป็นไอดิลและ B -พีชคณิตย่อย ซึ่งผลการวิจัยพบว่าโครงสร้างของ $M(X)$ และ $C(x)$ มีความซับซ้อนมากกว่าเซตย่อยทั่วไป

ในด้านการศึกษาคู่มือเชิงฟังก์ชัน งานวิจัยนี้มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญจากการศึกษาของ Al-Shehri (2010) และ Endam & Vilela (2014) ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับสาขาสถิติฐานที่รักษาลำดับการดำเนินการแบบเดิม แต่การสร้างโครงสร้างบนเซตของ B -ปฏิสัทฐาน ($AHom(X, Y)$) ในงานวิจัยนี้ ได้แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการรักษาโครงสร้างพีชคณิตแม้จะมีการกลับลำดับของการดำเนินการ จุดที่น่าสนใจที่สุดคือ ผู้วิจัยพบว่าภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม $AHom(X, Y)$ ไม่เพียงแต่เป็น B -พีชคณิต เท่านั้น แต่ยังมีสมบัติเป็น B -พีชคณิตสลับที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ อีกด้วย อย่างไรก็ตาม ยังมีสมบัติหลายประการของ B -พีชคณิต ที่น่าสนใจศึกษาค้นคว้าต่อไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการศึกษาเรื่องไอดิล พีชคณิตผลหาร และการแปลง บนเซตของฟังก์ชัน B -ปฏิสัทฐาน ซึ่งเป็น B -พีชคณิต ใหม่

Conclusions

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่า B -พีชคณิต มีโครงสร้างและสมบัติบางประการที่น่าสนใจ โดยสามารถพิสูจน์สมบัติที่สำคัญหลายประการที่เกี่ยวข้องกับ B -พีชคณิต ได้ นอกจากนี้ ยังพบว่าเซตของ B -ปฏิสัทฐานมีโครงสร้างเป็น B -พีชคณิตด้วยเช่นกัน

Acknowledgments

ขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

References

- Abdullah, H.K, & Atshan, A.A. (2017). Complete Ideal and n -Ideal of B -algebra. *Applied Mathematical Sciences*, 11(35), 1705-1713.
- Allen, P.J., Neggers, J., & Kim, H.S. (2003). B -algebras and Groups. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 9, 159-165.
- Al-Shehri, N.O. (2010). Derivations of B -algebras. *JKAU: Sci.*, 22(1), 71-83.
- Al-Shehri, N.O. (2010). On $\text{Hom}(-,-)$ as B -algebras. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 18(1), 17-24.
- Endam, Joemar C., & Vilela, P. (2014). The Second Isomorphism Theorem for B algebras. *Applied Mathematical Sciences*, 8(38), 1865-1872.
- Endam, Joemar C. (2016). Centralizer and Normalizer of B -algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 1-7.
- Kondo, M., & Jun, Y.B. (2002) The class of B -algebras coincides with the class of groups. *Sci. Math. Japo. Online*, 7, 175-177.
- Lingcong, Jacel, Angeline V., & Endam, Joemar C. (2016). Direct Product of B algebras. *International Journal of Algebra*, 10(1), 33-40.
- Neggers, J. ,& Kim, H.S. (2002). A fundamental theorem of B -homomorphism for B -algebras. *Intern. Math. J.*, 2, 207-214.
- Neggers, J., & Kim, H.S. (2002). On B -algebras. *Mate. Vesnik*, 54, 21-29.
- Walendziak, A. (2005). Anote on normal subalgebras in B -algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 49-53.
- Wicaksono, P. S., Triyanti, N. S., Sarti, L. , & Kusniyanti, E. (2023). $B\text{-Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ as B -algebras. *ITB Graduate School Conference*, 3(1), 630-641.
- Yattagi, E., Gemawati, S., & Hasbiyati, I. (2021). On Left f_g -Derivations of B -algebras. *Sintechcom: Science, Technology, and communication Journal*, 2(1), 1-8.